

Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.173



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.173



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.173



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CINMAGL 1.7.173

1. 7. 173



JOANNIS BAPTISTÆ
PALMÆ
NEAPOLITANI
IN GEOMETRIAM
EXERCITATIONES

Illustris. & Excellentiss. Domino

CARMINO NICOLAO
CARACCIOLO

Castelli de Sangro Duci,

Et PRINCIPIS S. BONI Filii meritissimo

DICATÆ.



NEAPOLI, 1689. Ex Nova Sociorum Officinā
Dom. Ant. Parrino, & Michaelis Alovfii Mutii.

SUPERIORUM PERMISSU.

152.

1
7
173

JOHANNIS BAPTISTE

V A I M E

INSTITUTIONES

IN COLUMBIAM

DE GENTIBUS

IN COLUMBIAM

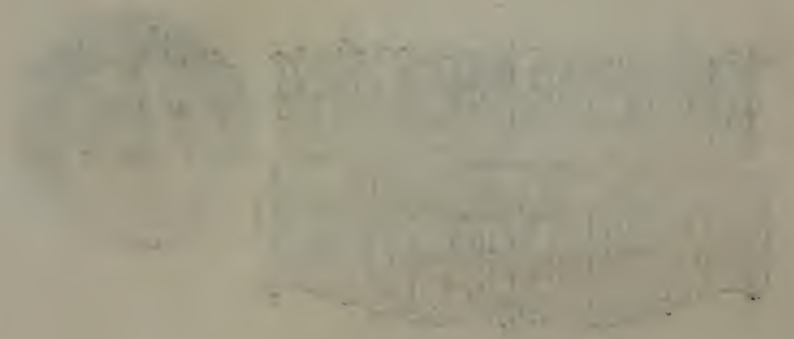
DE GENTIBUS

IN COLUMBIAM

DE GENTIBUS

IN COLUMBIAM

DE GENTIBUS



ALLI SIGILLI DI COLUMBIAM

1.7.173

1.7.173

vius
que
artin
con
stud



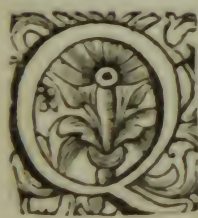
Illustris. & Excellentiss. Domino

CARMINO NICOLAO
CARACCILO

CASTELLI DE SANGRO DUCI,

Et PRINCIPIS S. BONI Filio meritissimo

Joannes Baptista Palma.



Quoniam homo ex omnibus animantibus factus est à Divina Omnipotentia mentis, ac rationis particeps, ut à rebus creatis ad cognitionem tantarum rerum Opificis perveniat, nihil sane illi suavius evenire potest, quam res incorporeas, corporeasque, & earum causas contemplari, atque in novarum artium, scientiarumque investigationem sua studia conferre: inter hæc vero summam nos ex Matheſeos studio capere voluptatem, omnibus in confesso est;

a

2

ca

ea enim adeo est & subiecto, & certitudine nobilis, atque jucunda, ut intellectus noster, qui nihil nisi veri cognitionem affectat, quasi in una hac disciplina pabulum invenire videatur qua de re merito ea inter reliquas scientias principem locum obtinet. Nec secus divinus Plato in Philebo sentit; eam enim scientiam esse digniorem ait, & præstantiorem, in qua plus synceritatis, veritatisque elucet, quæ omnia in Mathesi maximè reperiuntur. Accedit ad Mathematicarum disciplinarum præstantiam summa, quæ nobis afferunt utilitatem ad philosophiam naturalem, & ad reliquas huiusmodi facultates, artesque perdiscendas, quæ tanta est, ut dubium non sit quin fallantur ij præcipuè, qui ad rerum naturalium contemplationem sine ipsarum auxilio suum animum adjungunt. Etenim quis unquam de cælorum structurâ, Planetarum, stellarumque motibus, ac magnitudine quidquam statuet Mathematicis doctrinis non imbutus? Quis Opticorum, & Catoptricorum opedestitutus Circuli lactei, Cometarum, Iridis, Pareliorum, Virgarum, aliorumque huiusmodi pernoscet naturam? Nec profectò video quisnam de Terræ amplitudine, ac rotunditate suppeditaverit nobis argumentum nisi à Geometris id petamus. Præterquamquod nec humani corporis, aliorumque animalium fabricam, ut cur musculorum tendones hîc in ossium capita, alibi in os medium inferantur, neque eorundem vel saltem aliquas actiones satis intelligemus

mus sine prævio Mathematicorum auxilio . Adeo
ut ad hæc omnia , totamque rerum naturam intelli-
genda necessaria; nedum utilis merito videatur Ma-
thesis . Quam sane sententiam Philosophi plerique
omnes edocuerunt . Unum hîc referam peripateti-
cum Simplicium contrà istos Aristippeos . qui *ut li-
tere inquit, discendæ sunt ad Mathematica percipiē-
da, ita ea propter Philosophiam.* Quare idem efficere
mihi videtur is, qui Mathematicis disciplinis non
degustatis , repente ad Philosophos divertit , quod
qui alicujus codicis materiam intellecturus, ejusdem
tamen characteres minime tenet . Mathematicis
enim characteribus , nimirum triangulis, atque cir-
culis (ut Magnus Galilæus loquitur) Philosophiæ;
hoc est Naturæ liber conscriptus est. Verum non est
cur tibi , Princeps Excellentissime, hujusce faculta-
tis præstantiam, utilitatemque pluribus probem, quæ
cum apprimè noveris licet ad omnia Naturæ arcana
rimanda sis unicè factus ; hanc tamen Philosophiæ
partem potiori quodam jure colendam, tuendamque
suscepisti , ut jam exemplo tuo summo in honore &
apud alios esse cœperit . Libuit vero hæc pauca de
Matheſeos dignitate, ac utilitate notasse potius ut
meorum studiorum rationem aliquam tibi expone-
rem . Cum enim ad Philosophiam animum dirige-
rem, cogitare mecum etiam , atque etiam cœpi un-
denam principium capeſſerem . Cumque mihi cogi-
tanti sæpiùs illud sapientiæ XI. subierit nimirum
Deum

Deum omnia μέγεθος, καὶ ἀριθμὸς, καὶ σωματὶς creasse, atq;
disposuisse operæ pretium esse existimavi à Mathe-
maticis incipere. Veritus interim Xenocratem in-
crepantē Λαβὰς γὰρ ἐκ ἐκείνης φιλοσοφίας., ac ejus docto-
rem Platonem Gymnasii foribus inscribentem εἰδὲς
ἀγγεωμετρῆσαι εἰσίστω. Quare ad Mathematicas discipli-
nas me contuli. quibus meum ingeniolum pro viri-
bus exercendo, non quidem historico modo, opellam
hanc confeci, quam in publicam lucem non nisi tuo
sub auspicio, tutelaque prodire volui, ut scilicet ei
meas hasce in Geometriam exercitationes nuncupa-
rem, cui summa omnia citra omnem adulationis sus-
picionem tribui vere possent. Et sane tanta est tui
nobilitas sanguinis, tanta optimarum artium non
levis peritia, tantaque tuarum virtutum magnitudo,
ut omni laude major semper extiteris. Etenim, si de
tuo gentilitio sermo est, quisnam percensebit unquā
infinitum prope heroum numerum, quibus perinde
ac sideribus Regia Caracciolorum familia illustra-
tur? quis omnia præclare facta tuorum domi, mili-
tiæque pro laude, pro Patria, pro Principe, ac pro Re-
ligione enarrabit? quis inquam, quæ in ea visuntur
præclariora virtutis monumenta; augusta nimirum
Regum paludamenta, opima Ducum, atque Impe-
ratorum devictis ex hostibus spolia, Clamydes, Pur-
puras, Infulas, Fasces, Trabeas, ac coronas omnes
perscribet enarraturus? Fac Principes hujus familiæ
enumeres, occurrent jam penè innumeri, quippe qui

ab

ab antiquo Normandorum, aliorumque regno plu-
ribus, & illustrioribus titulis florere; novem scili-
cet Principatibus, Ducatibus vero quindecim, ac
sexdecim Marchionatibus, & titulis sane majoribus
(Comitatus interim, minoresque Dominationes,
cum innumeræ penè sint omitto) non enim defuere
Caraccialorum familiæ Comites Stabuli, Logothetæ,
Aerarii Præfecti, Proreges, & summi exercituum
Imperatores. quos inter adnumerabis Principes au-
rei velleris, Hispaniæque Magnates plurimi, maxi-
mique apud Hispanos habitos. nec Ecclesiastici
Principes huic defuere familiæ, en tibi Albertus Ma-
gnus Magister Equitum Templariorum, & Riccar-
dus Rhodiorum, en quinque purpurati PP. ac Ro-
manæ Ecclesiæ Cardinales amplissimi Berardus, Ni-
colaus, Corradus, Marinus, & Indicus. en innume-
rabiles Archiepiscopi, Episcopique, qui quâ vigi-
lantia, quâ pietate egregii omnes fuere, en denique
Sardinia Reges, quorum omnium præclarè gesta;
nec mihi opus est ut enarrem, cum ad hoc ipsum vel
ipsa Fama sponte se offerat. Facere tamen non pos-
sum quin unum, aut alterum Caracciolorum He-
roum, eorumque facta vel saltem breviter attingam;
Marinum .s. Caracciolum quartū Bucchianici Mar-
chionem, qui adhuc adolescens in Sienensi bello, nō
nisi victor à dimicatione semper rediit. qua de re in
Estia Equitum Præfectus factus fuit. Deinde adver-
sus Gallos duorum millium militum Imperator ele-
ctus,

ctus, quo in bello & fortitudine, & celeritate consilii
usus maximam sibi, suisque laudem vindicavit. hu-
jus autem singularem erga Religionem pietatem,
quibus laudibus commendem non invenio. cum
enim Calabriae praeset, illic Lutheranam haeresim
exortam praestanti prudentia, pietateque delevit. Nec
silentio praetermittam Joannem Antonium, qui ob
Samnium ab irruptione Barbarorum strenue, mirifi-
ceque servatum a Philippo II. Principis S. Boni titu-
lo merito fuit decoratus. Nec singularem Marci An-
tonii erga Ferdinandum II. praestitam fidem. tanta
enim fuit praclarissimi hujus viri fides erga Princi-
pem Ferdinandum, ut occupato jam Regno a Caro-
lo VIII. comitem se illi in calamitatibus praebere
voluerit, bona, amicos, patriam, parentesque dere-
linquens. O magnum quidem fidei, & rarum pieta-
tis opus! Sed jam hos, sexcentosque alios qua mili-
tari laurea, ac rebus bene gestis, qua consilio pruden-
tiaque conspicuos derelinquamus, cum in uno Ma-
rino quarto S. Boni Principe omnes istorum virtu-
tes simul elucescant; Pietas nimirum erga Patriam,
& Religionem, fides erga Principem, prudentia in-
agendo, in consulendo maturitas, fortitudo in peri-
culis, tantaque etiam Eloquentia ut Roma ipsa Ma-
rinum orantem plurimum admirata sit. cum scilicet
a Carolo II. Rege Catholico ad Innocentium XI.
Pontificem Maximum legatus missus fuit. unde re-
gressus & ob legationem summa cum laude confe-
ctam,

Etiam, & ob tot, tantasque ejus virtutes jure, meritoque;
Hispanorum Magnatum honore cohonestatus est.
Tanto igitur ex Principe natus es Vir meritissime,
paternarum virtutum, atque honorum merito hæres
futurus. idque tua indoles pene regia, virtutes prin-
cipe dignæ, ac singularis morum integritas promit-
tunt. Negabit ne quis unquam Heroicam hanc esse
familiam, quando in ea Heroes moriuntur, ac melio-
ri fato renascuntur Heroes? Hoc verè est quod de
ramo aureo divinus ille Mincii olor splendide finxit
uno avulso alterum non deficere aureum, similique
metallo virgam frondescere. Verum utinam, Excel-
lentissime Princeps per tuam verecundiam mihi li-
ceret liberè quid de te uno sentiam dicere; quantis in
cælum tollerem laudibus virtutes illas, quæ animū
exornant tuum. quibus certè facis majorum tuorum
præclare gestis fidem. Quantum vero in suaviorum
musarum, severiorisque Palladis studio profeceris
omnes cognovimus, qui alacrem ingenii tui felici-
tatem, & in carminibus pangendis, & in Mathemati-
cis disciplinis perlustrandis, aliisque liberalibus arti-
bus non semel demirati sumus. Quibus incredibile
prope mores tam feliciter conjunxisti, ut supra cæte-
ros longè præstantiores mores tui divinum nescio
quid sapiant. Verum in te singula commendare
neque tua patitur verecundia, neque humanæ vis
eloquentiæ potest. adeo enim ex his omnibus Præ-
stantissime Vir splendescis, ut præ nimio tuo lu-

b

mine

mine, veluti ardentissimus sol, te quodammodo
nobis occulas, ac mentis aciem evincas. Patiare in-
terim Princeps Excellentiss. ut gloriosum tuum no-
men ab invidorum ictibus meum hunc libellum pro-
tegat. teq; etiam, atque etiam oro, ut quodcunque
sit illud a me hoc munusculum, ut sempiternum
mei obsequij, meæque erga te observantiæ monu-
mentum accipias. Da etiam meæ tenuitati veniam
si te pro dignitate non laudaverim. eo enim deve-
nit virtus tua, ut illius nulla sit vera, ac germana
laus, quam satis laudari non posse. Vale Caracciolo-
rum familiæ Decus. Neapoli Idibus Junij Anni
MDCLXXXIX.

BENEVOLO LECTORI.

CUM has nostras in Geometriam exercitationes in publicum emitto capdide Lector, non ea mihi mens est, ut aliquid ab eruditis viris aut gloriae, aut laudis aucuper. Agnosco enim me nihil magni, nihil eximii praestitisse, ut tantum mihi tribuam. Ea tamen instituti mei, & causa, & ratio est, quod cum à liberalibus disciplinis abhorruerim nunquam, tum iis potissimum studiis sum delectatus, in quibus, & sapientia maximè, & veritas elucet. Quae omnia una in Mathesi sita esse in comperto est. Itaque cum mihi quidè semper in more positum fuit, ea scriptis committere, quae aut mente conceperam, aut verbo protuleram, ut altiores animo radices agerent, & firmitus inhaerent: hinc factum est, ut amicorum aliquot cum in hos matheseos tractatus incidissent me iterum, atque iterum rogarent, ut Typis mandarem, quae domi propè situ obsita, diu latitarent. Nunquam adducebar ut facerem. Persuaserunt tandem meq; invitum, & audacter abnuentem in sententiam tamen adduxerunt. Neque enim me latebat, Aristarchos mihi non defuturos: & quod caput est, qui non immerito opus hoc carperent, cum vel ipsa super hac re praclarissimorum virorum volumina acriter notari, & egregia dicta in pejus distrahi videantur. Quod hominū genus si quid ceteris inclementius habendum, mihi certè humanius, ut parcius se viant, excipiendum est. Verum, quidquid idest Lector benevole, me non pro rei dignitate, sed pro meis partibus egisse arbitreris velim: quas enim in Geometriam exercitationes meo Marte meditatus sum publicè lucis faciam, ut ad similia mihi aequalium animos accendam. Ac ne multis te morer amice Lector, meū opusculum, ut planè cognitum tibi sit, ad manus habe fortasse tibi quidem probabitur; sin minus respice aetatem, & non me plus iusto dictis incesas; utere tamen pro ingenio praestantioribus. Aequi bonique consule, & vale.

In prima Epistola Siensenſi l. Siensenſi. incredibile l. incredibiles. In dictionibus vero graecis characterum graecorum defectu orthographia graeca minime est servata.

EPISTOLA

*Nicolai Parthenii Giannattasii ad Authorem
Neapolim.*

Gratias tibi ago quam maximas; Vir erudite, quod tuas Geometricas præexercitationes ad me recognoscendas miseris. illas ego avide, summaq; cum animi voluptate lustravi; dignasq; duxi, ut publicæ lucis facias, quod quidem illæ meritò tibi deponunt; cum scitu dignæ, ac perutiles sint; solidasq; habeant demonstrationes. sunt, & ingenii tui argumentum eximium, quod sanè ex illis se maximè fœcundum prodit, quin, & intelligendo acre, in exponendo verò per quam promptum, ac dexterrimum, id autem mirum sanè est: cum alii matura in ætate ex longo præconceptos partus edant: tu id juvenili in ætate præstas, & quamquam præcoces sint ingenii tui partus; sunt tamen absoluti, perfectis numeris suis. Plura omitto, ne offendam modestiam tuam. Vale, Massæ Lubrensis Kal. oct. MDCLXXXVII.

SONETTO.

DELL'ILLUSTRISS.ET ECCELLENTISS. SIG.
DUCA DI CASTEL DI SANGRO

All' Autore .

PALMA, dalle tue carte alti prefaggi
Forma la mente mia de tuoi pensieri ;
E dalle linee tue scorge i sentieri ;
Per quai giungesti al numero de saggi .

E se queste son curve . ecco i messaggi
D'una gloria immortal troppo sinceri ;
Perche simboli son degli archi alteri ,
Che'l Mondo appresta alla virtù in homaggi .

Ma dal composto d'esse omai son certo ,
Che con i punti lor gli ultimi segni
Von dinotar, che tu ponesti al merto .

E se i Circoli osservo . ecco i disegni
Delle corone, e del pregiato ferto ;
Che freggiar ti dovran Rè de gl' Ingegni .

RIS-

RISPOSTA

Dell' Autore

Questi, che di me formi, alti presaggi
Signor, non fanno a tuoi giudici interi ;
Che tai non son mie carte , ond' a me spero
Nome, che, qual tu fai, il tempo oltraggi .

Tua virtù, che rivolge in me suoi raggi,
Pinse forse in altrui suoi pregi alteri ;
E degnò me d'honor, che tuoi son veri ;
Qual, chi pur troppo abbòda in suoi vantaggi.

Ben mio desir mi sprona a l'ermo, ed erto
Giogo; ove chiaro già vestigio segni .
Ma'l cor tarda il sentier dubbio, ed incerto.

Felice te, cui diè securi pegni
Virtù sovrana, e'n breve età fè certo
D'immortal vita, e d'atti eccelsi, e degni .

EMI-

EMINENTISS. SIG.

DOm. Ant. Parrino, e Michele Luigi Mutii, dovendo stampare alcune Opere Matematiche; il di cui titolo è *Ioannis Baptiste Palmæ Neapolitani in Geometriam Exercitationes*: supplicano perciò V. E. concedergli la solita licenza, e l'averanno à gratia, ut Deus, &c.

P. Nicolaus Giannettasius Soc. Iesu, lector, & professor Mathematicis in Almo Collegio Soc. Iesu Neapoli vident, & referunt in scriptis, hac die 23. Febr. 1688.

Sebastianus Perissus Vic. Gen.

EMINENTISSIME DOMINE.

Perlegi Librum, cui titulus: *Ioannis Baptiste Palmæ Neapolitani in Geometriam Exercitationes*; nihilque in eo animadverti, quod vel Fidei Orthodoxæ, vel moribus obsit; quin potius ingeniosum, politumque opus luce dignum censeo, acceptumque Geometris futurum. Neapoli, ex Collegio S. Nostræ 15. Kal. Aprilis ævæ Christianæ 1688. E. V.

Additissimus Servus

Nic: Parthenius Giannettasius Soc. Iesu.

Attenta relatione superscripti Revisoris Imprimatur hac die 24. Aprilis 1688.

Sebastianus Perissus Vic. Gen.

ECCELLENTISS. SIGNORE.

DOm. Ant. Parrino, e Michele Luigi Mutii, humilmentę espongono à V.E. come desiderano stampare un libro, il titolo del quale è *Ioannis Baptista Palme Neapolitani Exercitationes in Geometriam*. Per tanto supplicano V.E. per la solita licenza, e l'averanno à gratia, ut Deus, &c.

Reu. Dot. D. Franciscus Maria d'Asti Cler. Reg. Teatin. videat, & in scriptis referat.

Carrillo Reg. Soria Reg. Mioballus Reg. Iacca Reg.
Provenzalis Reg.

Provisum per S.E. Neap. die 4. Februarii 1688.

Mastellonus.

III. Dux Paretę non interfuit.

EXCELLENTISSIME DOMINE

ORdine Excellentię Tuę perlegi Opus, cui titulus. *Ioannis Baptista Palme Neapolitani in Geometriam Exercitationes*; cumque in eo nihil Regię Iurisdictioni, politicoque regimini absconum invenerim, idcirco Typis committendum autumo. Neapoli in AEdibus Sanctę Marię Angelorum duodecimo Kal. Aprilis 1688.
Excellentię Tuę

Additissimus Servus

D. Franciscus Maria de Alte ex Clericis Regul.
Regii Collateralis Theologus.

Visa supradicta relatione imprimatur, & in publicatione servetur Reg. Pragm.

Carrillo Reg. Moles Reg. Mioballus Reg. Iacca Reg.

Provisum per S.E. Neap. die 1. Aprilis 1688.

Mastellonus.

III. Marchio Crispani, & Spect. Reg. Provenzalis non interfuerunt.

E R R A T A.

PAg. 17. ver. 28. & pag. 18. ver. 27. secuimus l. secuimusf Pag. 21. ver. 20. 22. 23. quintę l. quintę. Pag. 23. ver. 3. & 4. utriq; l. utriq; & ver. 30. recti l. recti æqualis. Pag. 69. ver. 16. B C l. A C. Pag. 88. ver. 1. Theorematis l. Theorematis, & ver. 6. Scolium l. Scholium. & ver. 7. duobus l. duabus. Pag. 101. ver. 26. esse A B l. A B esse.

PRO-



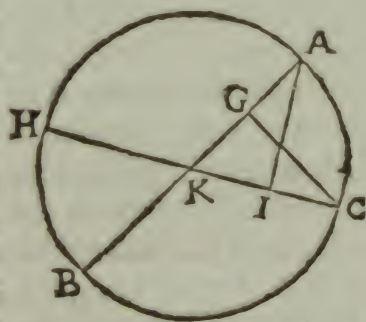
PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

Dato circulo, & in ejus circumferentiâ signato puncto, invenire diametrum, in quam cum cadet normalis à puncto dato secet diametrum inventam in datâ proportionē.



IN circumferentiâ circuli ABC signatum sit punctum A . Oportet igitur invenire diametrum, in quam cum cadet normalis à dato puncto A , secet ipsam in datâ proportionē rectæ DE ad EF . A puncto dato A ducatur diameter AB , quæ secetur in G , ita ut sit BG ad GA , ut DE ad EF , & erectâ super AB perpendiculari GC , ducatur diameter CH . Dico rectam CH esse diametrum quaesitam. Cadat ergo AI normaliter ad CH . Quoniam igitur angulus AIK trianguli AKI æqualis est angulo CGK



A

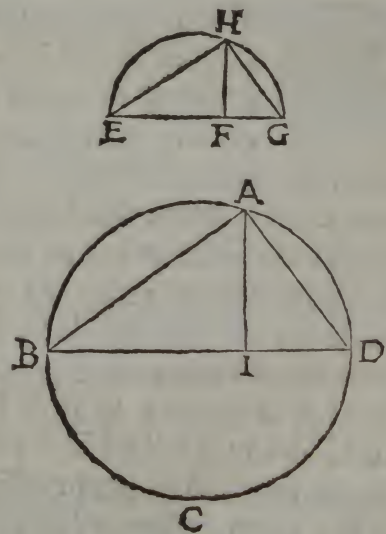
trian-

trianguli CKG , ambo enim sunt recti, & angulus CKA communis, latus vero CK æquale lateri AK , cum sint ejusdem circuli semidiametri; erit latus KI trianguli AKI æquale lateri GK trianguli CGK . Additis igitur semidiametris BK, HK ; erit tota recta BG toti HI æqualis: igitur reliquæ GA, IC inter se æquales erunt; Adeoque erit BG ad HI , ut GA ad IC ; igitur vicissim erit HI ad IC , ut BG ad GA ; hoc est DE ad EF . Inventa est igitur diameter in quam, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. II. PROPOS. II.

In circumferentiâ dati circuli invenire punctum, à quo quæ ducitur ad diametrum normalis, secet ipsam diametrum in datâ proportionem.

IN circumferentiâ circuli $ABCD$ oportet invenire punctum, à quo quæ ducitur ad diametrum BD perpendicularis, secet ipsam secundum proportionem rectæ EF ad FG . Super EG describatur semicirculus EHG , & excitatâ perpendiculari FH , adjungantur rectæ EH, GH , & fiat angulus DBA æqualis angulo GEH . Dico A esse punctum, quod invenire oportebat. Demittatur igitur AI ad diametrum BD perpendicularis, & jungatur DA . Quoniam ergo triangula EFH, BIA inter se sunt æquiangula,



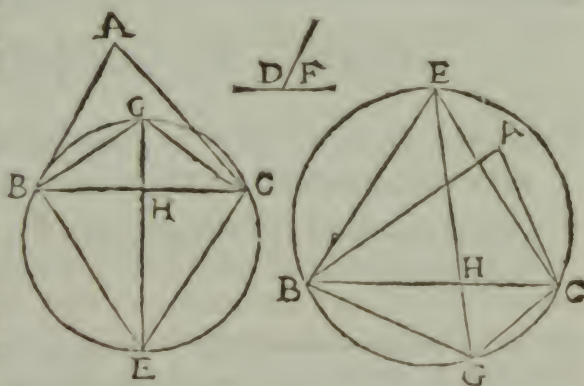
3

la; erit latus EF ad FH , ut BI ad IA . Eâdem ratione, erit HF ad FG , ut AI ad ID . Quocirca cum sit EF ad FH , ut BI ad IA , & FH ad FG , ut IA ad ID ; erit ex æqualitate EF ad FG , ut BI ad ID . Divisa est igitur diameter BD circuli $ABCD$ à perpendiculari AI in datâ ratione rectæ EF ad FG . In circumferentiâ igitur dati circuli inventum est punctum, à quo quæ, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. III. PROPOS. III.

Dato triangulo, invenire punctum five extra, five intra triangulum, à quo, actæ duæ rectæ lineæ ad duo extrema puncta lateris dati trianguli, teneant eandem rationem inter se, ac reliqua latera, contineantque angulum dato angulo æqualem.

Sit datū triangulum ABC . Oportet igitur invenire pūctum five extra, ut in pr.fig., five intra datum triangulū ABC , ut in secun. à quo, ductæ duæ rectæ lineæ ad duo extrema puncta B , & C la-



teris BC , teneant inter se rationem eandem, ac reliqua latera AB , AC , contineantque angulum dato angulo D æqualem. Super rectâ BC versus quasvis partes describatur segmētum BEC , quod capiat angulum æqua-

A 2

lem

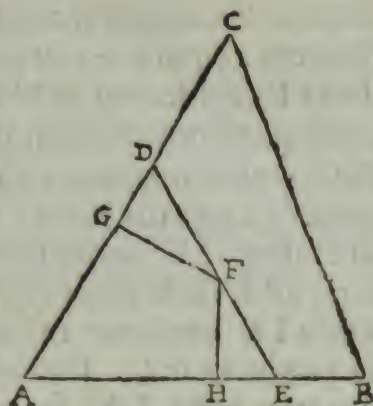
lem angulo,quem angulus D è duobus rectis relinquit ;
 hoc est angulo F , & segmenti BE C circulus BE C G
 compleatur. Diviso deinde segmento BE C bifariam in
 E , & recta BC divisâ in H , ita , ut sit BH ad HC , ut
 BA ad AC ,adjungatur EH ,quæ producat in G . Di-
 co G esse punctum quod quæritur. Ducantur modo GB ,
 GC . Quoniam igitur arcus BE æqualis est arcui EC ;
 erit angulus BGE angulo EGC æqualis . Divisus est
 igitur,angulus BGC bifariam à rectâ GH ; adeoq; erit,
 ut BH ad HC , ita BG ad GC . Sed ut BH ad HC , ita
 est BA ad AC ; igitur ut BA ad AC , ita erit BG ad GC .
 Rectæ igitur BG , GC eandem tenent rationem , ac
 latera BA , AC . Quod autem contineant angulum BGC
 æqualem angulo D patet. Nam ductis BE , CE : erunt
 anguli BGC , BE C duobus rectis æquales , adeoque
 æquales angulis D , F ; Atqui angulus BE C angulo F
 est æqualis ; igitur angulus BGC angulo dato D æqua-
 lis erit. Dato igitur triangulo, inventum est punctum sive
 extra, sive intra triangulū, à quo, &c. Quod erat faciendū.

PROBL. IV. PROPOS. IV.

Intra datum triangulum, punctum invenire, à quo
 actæ normales ad duo ipsius trianguli latera, te-
 neant eandem rationem inter se, ac latera in quæ
 incidunt .

INtra triangulum ABC oportet invenire punctum, à
 quo ductæ normales ad duo latera ipsius, teneant ra-
 tionem eandem inter se, ac latera in quæ cadunt. Ex re-
 ctis AB , AC abscindantur AD , AE inter se æquales ,
 & adjuncta DE secetur in F , ita ut sit DF ad FE , ut AC
 ad AB . Dico F esse punctum quæsitum . Ducantur igi-
 tur FG , FH perpendiculares ad AB , AC . Quoniam
 igi-

igitur angulus ADE æqualis est angulo AED , & angulus FGD angulo FHE æqualis; erit reliquus angulus GFD trianguli GDF reliquo angulo HFE triânguli FHE æqualis. AEquiângula igitur sūt triângula GDF , FHE ; ac propterea erit GF ad FD , ut HF ad FE . Igitur permutâdo erit GF ad FH , ut DF ad FE . Sed ut DF ad FE , ita se habet AC ad AB : igitur erit perpēdicularis FG ad perpendicularem FH , ut AC ad AB . Itaque intra datum triangulum inventum est punctum, à quo ductæ, &c. Quod erat faciendum.

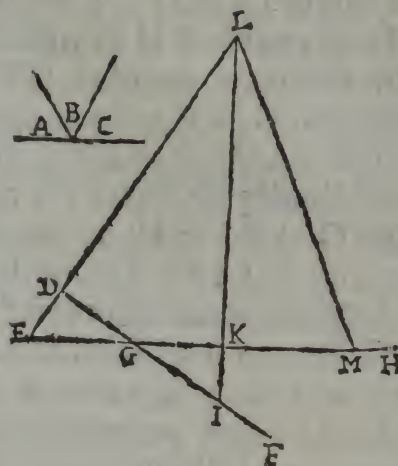


PROBL. V. PROPOS. V.

Triangulum invenire, quod habeat angulos tribus datis angulis æquales singulos singulis, unumque laterum, quod superet perpendicularem ejusdem trianguli excessu dato. Oportet autem tres datos angulos duobus rectis esse æquales.

SInt tres dati anguli A, B, C , excessus vero DE . Oportet itaq; invenire triangulum, cujus anguli æquales sint tribus angulis A, B, C singuli singulis, excessus vero, quo unum trianguli laterum superat perpendicularem ejusdem, sit recta DE . A puncto D , vel à puncto E dati excessus DE erigatur perpendicularis DF , utcunq; producta in F , & ad alterum punctum E constituatur angulus DEG æqualis angulo acuto A (non enim recto vel obtuso constitueretur æqualis, nam secus recta EG rectam

etiam DF minimè secaret, quod cœteroqui ad constru-
tionem requiritur) & pro-
ductâ EG utcunq; in H se-
cante perpendicularem DF
in G , abscindatur ex GF
recta GI æqualis rectæ EG ,
ducaturq; IK perpendicu-
laris ad EH , & utcunq; pro-
ducta IK occurrat rectæ E
 D productæ in L . Denique
ducatur recta LM faciens
cum rectâ EL angulum EL
 M æqualem angulo B , & oc-
currat rectæ EH in M . Dico



triangulum LEM esse de quo quæritur. Quoniam igitur
angulus LEM æqualis est angulo A , & angulus EL
 M æqualis angulo B : erit reliquus angulus LME reliquo
angulo C æqualis. Anguli igitur triânguli LEM æquales
sunt datis angulis A, B, C singuli singulis. Et quia ángulus
 EGD triânguli GED æqualis est angulo IGK triânguli
 KGI , & angulus EDG angulo IKG æqualis, latus
vero EG lateri GI æquale; erit angulus DEG angulo
 GIK æqualis, & latus DG lateri GK æquale; Adeoq;
tota DI æqualis erit toti EK . Quapropter cum anguli
 LEK , EKL triânguli KEL æquales sint angulis L
 I
 D, IDL triânguli DIL uterq; utriq;, latus vero EK late-
ri DI æquale; Erunt rectæ LD , LK inter se æquales:
Sed latus LE triânguli LEM superat rectam LD dato
excessu DE ; igitur superabit etiam perpendicularem
 LK dato excessu DE . Triangulum ergo LEM tres ha-
bet angulos tribus datis angulis A, B, C æquales singu-
los singulis, & latus LE , quod superat perpendicularem
 LK ejusdem triânguli LEM dato excessu DE . Inven-
tum est igitur triangulum, &c. Quod erat faciendum.

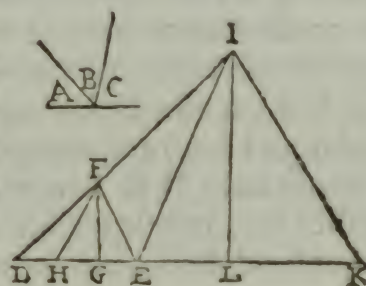
Trian-

PROBL. VI. PROPOS. VI.

Triangulum invenire, quod habeat tres angulos tribus datis angulis æquales singulos singulis, & basin, quæ superet perpendicularem ab angulo opposito ad ipsam ductam excessu dato. Oportet autem tres datos angulos duobus rectis esse æquales.

Oportet invenire triangulum, quod habeat tres angulos æquales angulis A, B, C singulos singulis, & basin, quæ superet perpendicularem ab angulo opposito ad ipsam ductam excessu dato DE . Constituatur ad extrema puncta D, E dati excessus DE anguli FDE, FE D , quorum unus, nempe FDE æqualis sit angulo minori A , (si anguli A, B, C non fuerint inter se æquales) angulus vero FE D cuivis reliquorum; hoc est angulo B æqualis, & rectæ DF, EF coeant in puncto F , demittaturque perpendicularis FG . Et quia angulus FDE minor est ex constructione angulo DFE , erit recta DE major rectâ FE : sed FE major est perpendiculari FG . igitur recta DE multo major erit rectâ FG . Abscindatur igitur ex ED recta EH æqualis perpendiculari FG , & adjunctæ HF parallela agatur EL , quæ occurrat rectæ DF productæ in I , & IK parallela rectæ FE occurrat DE productæ in K . Dico triangulû IDK esse quod quæritur. Quoniâ igitur angulus IDK æqualis est angulo A , angulus vero IKD æqualis angulo FED ; hoc est angulo B ; erit reliquus angulus DIK reliquo angulo C æqualis. Anguli igitur trianguli IDK æquales sunt datis angulis A, B, C singuli singulis. Quod autem basis

DK

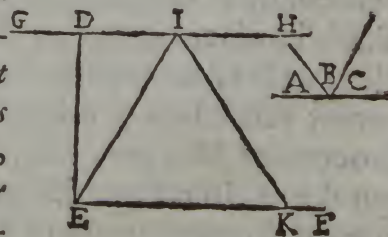


D K superet perpendicularem I L excessu dato D E, ita demonstratur. Anguli K E I, I K E trianguli I E K æquales sunt angulis E H F, F E H trianguli H E F uterque utrique: igitur reliquus angulus E I K reliquo angulo H F E erit æqualis. AEquiangula sunt igitur triangula H E F, I E K; Adeoque erit K E ad E I, ut E H ad H F. Et rursus quia triângula I E L, F H G etiã sunt æquiângula; erit E I ad I L, ut H F ad F G. Quare cum sit K E ad E I, ut E H ad H F, & E I ad I L, ut H F ad F G; erit ex æqualitate K E ad I L, ut E H ad F G: Sunt autem E H, F G ex constructione inter se æquales. Igitur K E, I L æquales inter se erunt. Atqui basis D K trianguli I D K superat E K excessu D E; ergo superabit etiam perpendicularem I L ab angulo opposito D I K ad ipsam ductam excessu dato D E. Inventum est igitur triangulum, quod habet tres angulos tribus datis angulis singulos singulis æquales, & basin, quæ superat, &c. Quod erat faciendum.

L E M M A.

Tribus datis angulis, & altitudine constituere triangulum. Oportet autem, ut tres anguli dati duobus rectis sint æquales.

D Atis angulis A, B, C, & altitudine D E. Constituentum est triangulum, quod habeat tres angulos tribus datis angulis A, B, C æquales singulos singulis, & altitudinem D E. Erigatur recta E F ad D E perpendicularis, cui per punctum D parallela agatur G H. Et constituto ad punctum E angulo F E I æquali angulo A, occurrat recta E I rectæ G H in I, & I K, faciens

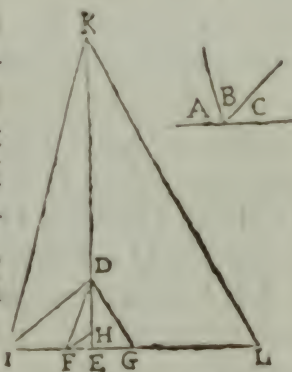


ciens cum recta $E I$ angulum $E I K$ æqualem angulo B , occurrat $E F$ in K . Dico factum esse, quod oportebat. Nam, angulus $K E I$ æqualis est angulo A , & angulus $E I K$ angulo B æqualis; reliquus ergo angulus $I K E$ reliquo angulo C æqualis erit. Triangulum igitur $E K I$ habet angulos æquales datis angulis A, B, C singulos singulis, & datam altitudinem $E D$, ut perspicuum est. Factum est igitur, quod erat faciendum.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Triangulum invenire, quod habeat angulos tribus datis angulis æquales singulos singulis, & perpendicularem ab angulo verticali ad basin ductam, quæ superet basin dato excessu. Oportet autem, ut tres anguli dati duobus rectis sint æquales.

Sint dati anguli A, B, C , excessus vero $D E$. Inveniendum est triangulum, quod habeat angulos æquales angulis, A, B, C , singulos singulis, & perpendicularem ab angulo verticali ad basin ductam, quæ superet basin excessu dato $D E$. Per expositum lemma, constituatur triangulum $D F G$, quod habeat altitudinem $D E$, & angulos æquales angulis A, B, C , singulos singulis; hoc est angulum $D F G$ æqualem angulo A , & angulum $D G F$ angulo B , angulum vero verticalem $F D G$ angulo minimo C æqualem. Deinde ex altitudine, seu perpendiculari $D E$ sumpta $D H$ æquali basi $F G$, (quod $D E$ major sit quam $F G$ supponitur, nam secus anguli dati A, B, C non forent anguli, ex quibus quodlibet



B

tri-

triangulum constitutum haberet perpendicularem a mi-
 nimo angulo ad basin ductam maiorem basi, ut propo-
 sitio requirit) ducatur DI parallela adjunctæ HF , quæ
 occurrat GF productæ in I , & recta IK parallela rectæ
 FD occurrat perpendiculari ED productæ in K . Ac de-
 mum KL , æquedistans rectæ DG , occurrat IG productæ
 in L . Dico triangulum KIL , esse de quo quæritur. Quo-
 niam igitur anguli KIL , KLI , trianguli ILK æquales
 sunt angulis DFG , DGF , trianguli FGD , uterque
 utrique : erunt triangu-
 la ILK , FGD inter se æqui-
 angula . Sunt autem anguli, trianguli FGD , æquales an-
 gulis A, B, C , singuli singulis; ergo anguli, trianguli ILK ,
 eisdem angulis A, B, C , singuli singulis, æquales erunt .
 Triangulum igitur ILK habet angulos æquales angulis
 datis A, B, C , singulos singulis . Quod autem perpendicu-
 laris KE superet basim IL excessu dato DE , sic proba-
 tur . Triangula ILK , FGD , ut modo demonstravi-
 mus, sunt inter se æqui-
 angula . Igitur erit ut GF ad FD ,
 ita LI ad IK . Et rursus quia anguli FDH , FHD ,
 trianguli DFH , æquales sunt angulis IKD , IDK , tri-
 anguli KID : erunt triangu-
 la DFH , KID inter se æqui-
 angula . Quare erit ut FD ad DH , ita IK ad KD . Ita-
 que cum sit, ut GF ad FD , ita LI ad IK , & ut FD ad
 DH , ita IK ad KD : erit ex æquo ut FG ad DH , ita
 LI ad KD . Atqui FG, DH sunt inter se æquales: ergo
 LI, KD inter se æquales erunt . Est autem DE excessus,
 quo perpendicularis KE superat rectam KD : igitur DE
 excessus erit etiam, quo eadem perpendicularis KE su-
 perat basim IL . Inventum est igitur triangulum, quod
 habet angulos tribus datis angulis æquales, singulos sin-
 gulis, & perpendicularem, &c. Quod erat faciendum.

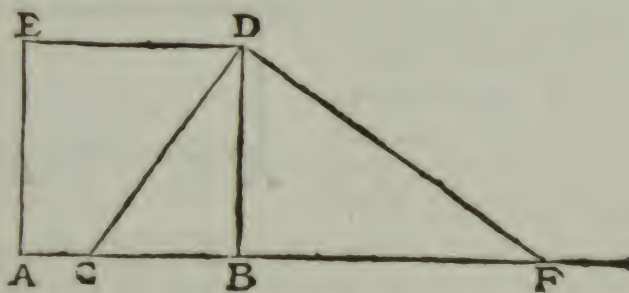
PRO-

PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

11

Ad datam rectam lineam, sectam utcunque, rectam lineam adungere, ita ut rectangulum comprehensum ab adjunctâ, & ab uno segmentorum ipsius datæ, æquale sit ei, quod a datâ rectâ describitur, quadrato.

AD datam rectam lineam AB , utcunque sectam in C , sit adjungenda recta linea, ita ut rectangulum cōprehensum ab adjunctâ, & ab uno segmentorum CB , datæ rectæ AB , æquale sit ei, quod a

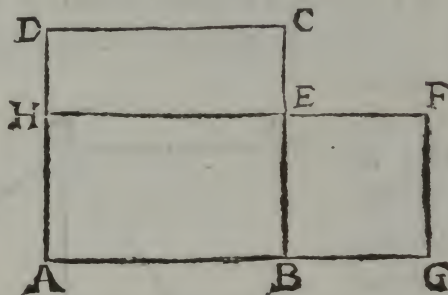


datâ AB describitur, quadrato. Describatur ex AB quadratum $ABDE$, & ductâ CD , erigatur ad ipsam perpendicularis DF , donec occurrat AB , utcunque productæ, in F . Dico rectam BF , esse lineam imperatam. Quoniam igitur angulus FDC , trianguli $FC D$, rectus est, & DB perpendicularis est ab basim FC ; erit DB media proportionalis inter segmenta CB, BF . Quare quadratum ex BD æquale erit rectangulo CBF ; hoc est quadratum ex AB æquale erit rectangulo contento sub adjunctâ FB , & sub uno segmentorū CB , datæ rectæ AB . Ad datam igitur rectam lineam, utcunque sectam, adjuncta est recta linea, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. IX. PROPOS. IX.

Ad datam rectam lineam rectam lineam adjungere,
ita ut ipsa data sit media proportionalis inter to-
tam, & adjunctam.

Sit recta AB ita augenda, ut ipsa sit media propor-
tionalis inter totam, & adjunctam. Ex AB descri-
batur quadratum AB
 CD . Et secta BC ex-
tremâ, ac mediâ rati-
one in E , describa-
tur ex majori segmē-
to BE quadratum
 $BEFG$. Et quia an-
guli ABC , CBG
recti sunt; erit AG



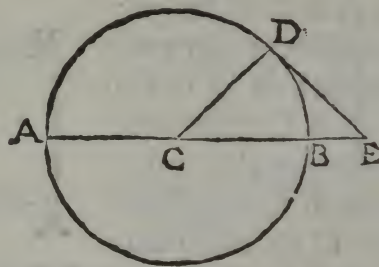
una continuata linea. Dico BG , adjunctam ad AB , esse
ad ipsam AB , ut AB ad totam AG ; hoc est AB me-
diam esse proportionalē inter totā AG , & adjūctam BG .
Producatur FE in H . Quoniam igitur BC secta est ex-
tremâ, ac mediâ ratione in E : erit quadratum BF a ma-
jori segmento BE descriptum æquale rectangulo contē-
to sub totâ BC , & sub minori segmento EC ; hoc est re-
ctangulo DE . Addito igitur communi rectangulo AE ;
erit quadratum AC rectangulo AF æquale. Tres igi-
tur rectæ lineæ AG , AB , BG erunt continuè proportio-
nales, quarum data AB est media inter totam AG , &
adjunctam BG . Data igitur recta linea, ita aucta est, ut
ipsa, &c. Quod facere oportebat.

PRO-

PROBL. XI. PROPOS. XI.

Ad datam rectam lineam rectam lineam adungere, ita ut quadratum descriptum ab adjunctâ, & a dimidiâ ipsius datæ, tanquam ab unâ rectâ lineâ, duplum sit ejus, quod a totâ cum adjunctâ, & ab adjunctâ solâ comprehenditur, rectanguli.

AD datam rectam lineam AB , bifariam divisam in C , adjuncta sit recta linea, ita ut quadratum descriptum a dimidiâ BC , & ab adjunctâ, tanquam ab unâ rectâ lineâ, duplum sit ejus, quod sub totâ AB , & adjunctâ, tanquam sub unâ rectâ, & sub adjunctâ solâ comprehenditur, rectanguli.



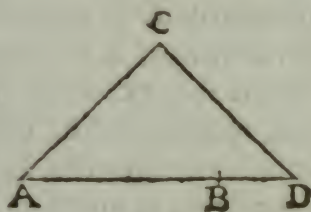
Describatur circulus ABD , cujus diameter sit AB , & constitutô ad centrum C angulô BCD semirectô, excutetur DE perpendicularis ad CD , donec occurrat AB , utcunque productæ, in E . Dico BE , esse rectam adjunctam ad datam AB . Quoniam igitur angulus EDC rectus est, & angulus DCE semirectus; erit etiam angulus DEC semirectus. Quare latera CD , ED , ac proinde ipsarum quadrata inter se æqualia erunt; Est autem quadratum CE æquale quadratis CD , ED ; igitur quadratum CE duplum erit unius ipsorum; hoc est quadrati ED ; Atqui quadratum ED æquale est rectangulo AEB (nam ED perpendicularis est ad semidiametrum CD ; Adeoque circulum ABD tangens est); ergo quadratum CE descriptum a dimidiâ CB , datæ rectæ AB , & ab adjunctâ BE , tanquam ab unâ rectâ, duplum est rectan-

et anguli AEB , contenti sub datâ AB , & adjunctâ BE ,
& sub adjunctâ solâ BE . Ad datam igitur rectam lineam
adjuncta est recta linea, ita ut, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. XII. PROPOS. XII.

Ad datam rectam lineam rectam lineam adjungere,
ita ut quadratum totius duplum sit quadrati datæ.

Ad rectam AB adjungenda sit recta linea, ita ut
quadratum totius duplum sit quadrati datæ AB .
Ad punctum A constituatur an-
gulus BAC semirectus, & AC
æqualis sit rectæ AB . Deinde
a puncto C erigatur recta CD
perpendicularis ad AC occur-
rens AB productæ in D . Dico
rectam BD , adjunctam ad datam
 AB , esse quæsitam. Quoniam
igitur angulus CAD semirectus est, & angulus ACD
rectus: erit reliquus angulus CDA etiam semirectus:
Adeoque æqualis angulo CAD . Quare latera CA , CD
æqualia inter se erunt. Cum autem quadratum AD
sit æquale quadratis DC , AC , quæ sunt inter se æqua-
lia: erit quadratum AD duplum quadrati AC ; Sed
quadratum AC æquale est quadrato AB . Ergo qua-
dratum AD quadrati AB duplum etiam erit. Ad datam
igitur rectam lineam rectam lineam adjunximus, ita ut,
&c. Quod erat faciendum.

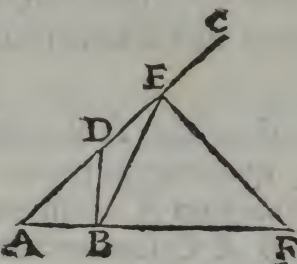


PRO-

PROBL. XIII. PROPOS. XIII.

Ad datam rectam lineam rectam lineam adungere,
ita ut quadratū totius duplū sit quadrati adjunctæ.

AD datam rectam AB oportet adungere rectam lineam, ita ut quadratum totius duplum sit quadrati adjunctæ. Ad punctum A constituatur angulus BAC semirectus, & AC sit producta utcunque in C . Deinde BD perpendicularis ad AB occurrat AC in D , & ex D C abscindatur DE æqualis rectæ DB . Denique EF perpendicularis ad AE occurrat AB productæ in F . Dico rectam BF esse quæsitam; hoc est quadratum totius AF duplum esse quadrati adjunctæ BF . Quoniam igitur angulus AEF est rectus, & angulus EAF semirectus; erit reliquus angulus EFA etiam semirectus. Ideoque æqualis angulo EAF . Ac propterea latera AE , FE inter se æqualia erunt. Quare cum quadratum AF æquale sit quadratis AE , FE , quæ sunt inter se æqualia, ob æqualitatem laterum AE , FE ; erit idē quadratum AF duplum unius ipsorum; hoc est quadrati EF . Cum autem latera DB , DE sint inter se æqualia: erunt anguli DBE , DEB inter se æquales. Quapropter ablati ipsis ab angulis rectis DEF , DBF ; erunt reliqui anguli BEF , EBF inter se æquales. Et ob id rectæ EF , BF ; hoc est ipsarum quadrata inter se æqualia erunt. Ostendimus autem quadratum AF duplum esse quadrati EF . Ergo igitur idem quadratum AF duplum etiam erit quadrati adjunctæ BF . Ad datam igitur rectam lineam rectam lineam adjunximus, ita ut, &c. Quod facere oportebat.

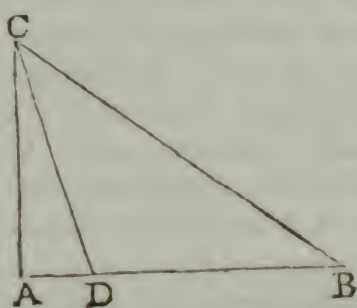


PRO-

PROBL. XIV. PROPOS. XIV.

Duarum rectarum inæqualium majorem, ita secare, ut quadratum unius segmenti æquale sit quadratis, quæ fiunt alterum à reliquo segmento, alterum vero à minori datâ rectâ lineâ.

Sint rectæ AB , AC inter se inæquales, quarum major sit AB . Oportet AB , ita secare, ut quadratum unius segmenti æquale sit quadratis, quæ fiunt alterum à reliquo segmento, alterum vero à minori rectâ AC . Connectantur AB , AC , ita ut faciant angulum rectum BAC , jungaturque CB . Et quia AB major est quâ AC ; erit angulus ACB major angulo ABC . Sumatur igitur ex majori angulo ACB angulus BCD æqualis angulo ABC , & CD secet AB in D . Dico rectam AB sectam esse in D , ita ut quadratum unius segmenti DB æquale sit quadratis, quæ fiunt alterum à reliquo segmento AD , alterum vero à minori rectâ AC . Quoniam igitur anguli DCB , DBC inter se sunt æquales; erunt rectæ CD , DB æquales inter se; Quare quadratum ex DB quadrato ex CD æquale erit; Sed eidem quadrato ex CD æqualia sunt quadrata CA , AD (angulus enim CAD rectus est) ergo quadratum DB æquale erit quadratis AD , AC . Duarum igitur rectarum inæqualium majorem, ita secavimus, ut quadratum, &c. Quod facere oportebat.



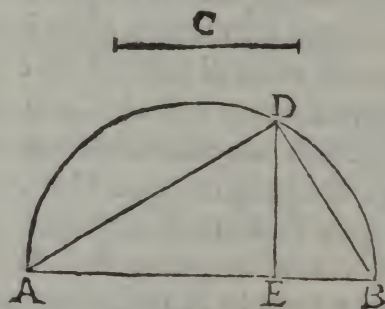
C

PRO-

PROBL. XV. PROPOS. XV.

Duarum rectarum inæqualium maiorem, ita secare, ut rectangulum comprehensum sub totâ, & uno segmentorum, æquale sit ei, quod à minori datâ rectâ describitur, quadrato.

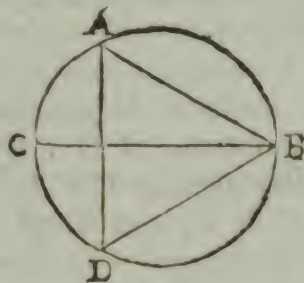
Sint rectæ AB , & C inæquales inter se, quarum maior sit AB . Oportet igitur maiorem AB , ita secare, ut rectangulum contentum sub totâ, & uno segmentorum æquale sit ei, quod à minori rectâ C describitur, quadrato. Super AB describatur semicirculus ADB , in quo accommodetur BD æqualis rectæ C (potest nimirum accommodari, nam diameter AB maior est quam C), & à puncto D demittatur perpendicularis DE . Dico rectâ AB , sectâ esse in E , ita ut rectangulum contentum sub totâ AB , & uno segmentorum BE æquale sit quadrato, minoris rectæ C . Ducatur DA . Quoniam igitur ab angulo recto ADB , trianguli ABD , ducta est ad basim AB perpendicularis DE ; erunt triangula ABD , EBD inter se similia. Quapropter erit AB ad BD , ut BD ad BE . Media proportionalis est igitur recta BD ; hoc est C , inter AB , & BE ; Ideoque rectangulum ABE , quadrato C erit æquale. Duarum igitur rectarum inæqualium maiorem, ita secavimus, ut, &c. Quod efficiendum erat.



LEM-

Recta linea in circulo accommodata, faciens cum diametro angulum æqualem tertiæ parti anguli recti; erit latus trianguli æquilateri in eodem circulo inscripti.

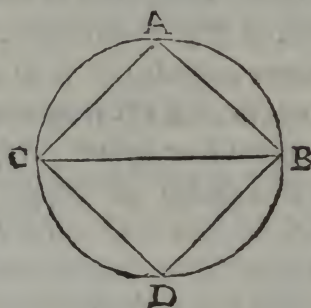
Recta AB , in circulo $ABDC$ accommodata, faciat cū diametro CB angulum ABC æqualem tertiæ parti unius recti. Dico AB , esse latus trianguli æquilateri in eodem circulo $ABDC$ inscripti. Constituaturs angulus CBD æqualis angulo ABC , jungaturq; AD . Quoniam igitur peripheria CAB æqualis est peripheriæ CDB , & ablata AC ablata DC , ob æqualitatem angulorum ABC , DBC ipsis insistentium; erit reliqua peripheria AB reliquæ DB æqualis: adeoq; rectæ AB , DB ipsas subtendentes inter se æquales erunt. Cum autem angulus CBD æqualis sit angulo ABC , qui tertia pars est unius recti; erit ipse tertia pars etiam unius recti; Igitur totus angulus ABD duæ tertiæ partes est unius recti; hoc est tertia pars duorum rectorum: ergo reliqui anguli BAD , BDA , trianguli DAB , erunt reliquæ duæ tertiæ partes duorum rectorum, qui cum sint inter se æquales, ob æqualitatem laterum AB , BD , ut modo demonstravimus; erit quisque ipsorum tertia pars duorum rectorum; Itaque anguli ABD , BDA , DAB , trianguli ABD , æquales inter se sunt; Æquiangulum est igitur triangulum ABD : Ac propterea æquilaterum. Recta igitur AE , quæ facit cū diametro CB , circuli $ABDC$, angulum ABC æqualem tertiæ parti unius recti, est latus trianguli æquilateri in eodem circulo inscripti. Quod erat demonstrandum.



L E M M A II.

Recta linea in circulo accommodata, faciēs cum diametro ejusdem angulum semirectum, latus est quadrati in eodem circulo inscripti.

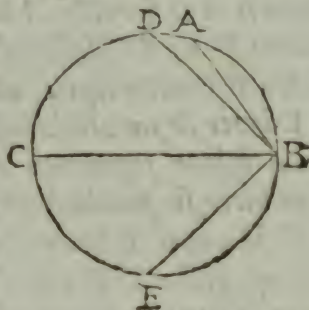
Faciat recta AB cum diametro CB , circuli $ABDC$, angulum ABC semirectum. Dico AB latus esse quadrati in eodem circulo $ABDC$ inscripti. Adjungatur AC , & ducta CD parallela rectae AB ducatur BD . Quoniam igitur angulus CAB , trianguli CBA , equalis est angulo CDB , trianguli BCD , ambo enim sunt recti, & angulus ABC angulo DCB equalis, latus vero CB commune; erunt latera CD , DB lateribus CA , AB , utrumque utrique, equalia; Atque latera CA , AB inter se sunt equalia, ob equalitatem angulorum ACB , ABC ; igitur latera CD , DB inter se equalia erunt. Quadrilaterum igitur $ACDB$ habet omnia latera inter se equalia; Sed habet etiam omnes angulos rectos (nam CD parallela est rectae AB , & angulus CAB est rectus: igitur angulus ACD rectus etiam erit; Est autem angulus CDB etiam rectus; ergo reliquus ABD rectus erit): Ergo igitur quadratum est quadrilaterum $ACDB$. Recta igitur AB est latus quadrati in circulo $ABDC$ inscripti. Quod erat demonstrandum.



LEM-

Recta linea in circulo accommodata, faciens cum diametro ejusdem angulum æqualem tribus quintis unius recti, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscripti.

Recta AB faciat cum diametro CB , circuli $BACE$, angulum ABC æqualem tribus quintis unius recti. Dico rectam AB , esse latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo $BACE$ inscripti. Si autem dicatur AB non esse latus pentagoni. Sit illud si fieri potest DB . Aptetur in circulo $BACE$ recta BE æqualis rectæ DB . Quoniam igitur arcus CAB æqualis est arcui CEB , & ablati arcus DB , ablato EB , ob æqualitatem rectarum BD , BE ; erit reliquus arcus DC reliquo arcui CE æqualis; Adeoque anguli DBC , EB ipsi insistentes æquales inter se erunt. Divisus est igitur bisariam angulus DBE , qui cum sit, per coroll. prop. 11. lib. 4. elem. sex quinta unius recti; erit angulus DBC , qui pars dimidia est anguli DBE , tres quinta unius recti; sed angulus ABC etiam ponitur tres quinta unius recti; igitur anguli DBC , ABC inter se æquales erunt, pars toti. Quod est absurdum. Non igitur DB ; sed recta AB est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo $BACE$ inscripti. Quod demonstrandum erat.

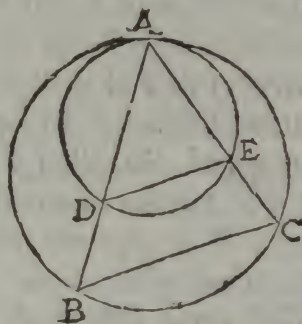


LEM-

L E M M A IV.

Si duo circuli se interius contingant, & à puncto contactus duæ rectæ in majoris circuli peripheriam cadant; rectæ lineæ, subtenfæ arcubus ab ipsis rectis interceptis, parallelæ inter se erunt.

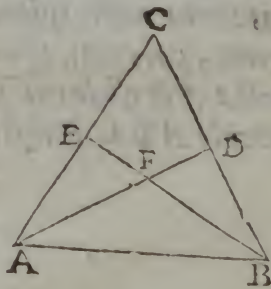
Circuli $A B C$, $A D E$ se mutuo interius tangant in puncto A , à quo cadant in peripheriam $B C$, circuli majoris $A B C$ rectæ $A B$, $A C$. Dico rectas $D E$, $B C$ subtenfas arcubus $D E$, $B C$ interceptis ab ipsis $A B$, $A C$ inter se parallelas esse. Quoniam igitur segmenta $A B$, $A D$ sunt inter se similia; erunt anguli $A E D$, $A C B$ inter se æquales: Adeoq; rectæ $D E$, $B C$ parallelæ inter se erunt. Quod ostendendum erat.



L E M M A V.

Super datâ rectâ lineâ triangulum isosceles cōstituerè, cujus uterque eorum, qui ad basim sunt angulorum, pars tertia sit unius recti.

Super rectâ $A B$ constituendum est triangulum isosceles, cujus uterque eorū, qui ad basim sunt angulorum, pars tertia sit anguli recti. Constituatur super $A B$ triangulum æquilaterum $A B C$, & anguli $C A B$, $C B A$ dividantur bisectionibus à rectis $A D$, $B E$ se mutuo secantibus in F . Dico triangulum $F A B$ esse quæsitum. Quoniam igitur anguli $C A B$, $C B A$ inter se sunt



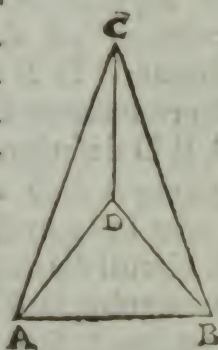
23

sunt aequales; erunt ipsorum dimidij, nempe anguli FAB, FBA etiam inter se aequales; Isosceles est igitur triangulum FAB ; Sunt autem uterque anguli CAB, CBA duae tertiae partes unius recti; igitur uterque anguli FAB, FBA pars tertia erit unius recti. Triangulum igitur FAB isosceles est, & habet utrumque eorum, qui ad basim sunt angulorum, &c. Quod faciendum erat.

L E M M A VI.

Super datâ rectâ lineâ triangulum isosceles constitutere, cujus uterque eorum, qui ad basim sunt angulorum, æqualis sit tribus quintis unius recti.

Super AB constituendū est triāgulū isosceles, cujus uterque eorum, qui ad basim sunt angulorum, sit æqualis tribus quintis unius recti. Constituatur super AB triangulum isosceles ABC , cujus uterque angulus CAB, CBA duplus sit reliqui ACB . Et ducta CD , quæ dividat angulum ACB bifariā, sumantur ex angulis CAB, CBA anguli CAD, CBD æquales angulis ACD, BCD , uterque utrique, & rectæ AD, BD sibi occurrant in D . Dico triangulum ABD esse imperatum. Quoniam igitur, per coroll. prop. 10. lib. 4. Elem. angulus ACB duæ quintæ est unius recti; erit uterque angulus CAD, CBD , utpote qui æquales sunt angulis, ACD, BCD , pars quinta unius recti; Est autem, per idem coroll. quilibet angulorum CAB, CBA quatuor quintæ unius recti; igitur si ex ipsis auferantur anguli CAD, CBD ; Erit tam angulus DAB , quam angulus DBA tribus quintis unius recti. Factum est igitur, quod faciendum erat.

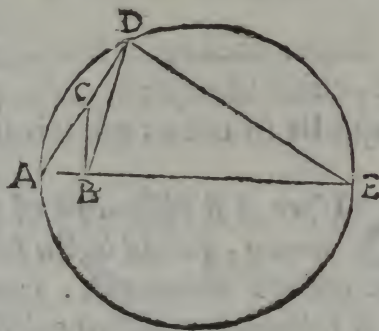


PRO-

PROBL. XVI. PROPOS. XVI.

Dato excessu, quo diameter circuli superat latus tri-
guli æquilateri in eodem circulo inscripti, inveni-
re circulum.

Sit AB excessus, quo diameter circuli superat latus
trianguli æquilateri in eodẽ circulo inscripti. Opor-
tet invenire circulum. Ad
punctum A constituatur an-
gulus BAC , qui duæ tertiæ
partes sit unius recti, & BC ,
perpendicularis ad AB , oc-
currat AC in C . Productâ
deinde AC in D , ita ut C
 D æqualis sit rectæ CB ,
erigatur ad AD perpen-
dicularis DE occurrens A
 B productæ, in E . Dico circulum ADE , circa triangulum
 AED descriptum, esse quæsitum. Quoniam igitur trian-
gulum AED rectangulum est; centrum circuli ADE
cadet in latus AE recto angulo ADE oppositum; Itaque A
 E circuli diameter est. Et quia angulus ADE rectus est,
& angulus DAE duæ tertiæ unius recti: erit reliquus
angulus DEA tertia pars unius recti; Quare, per pri-
mum lemma, recta DE latus erit trianguli æquilateri
in circulo ADE inscripti. Quod autẽ diameter AE su-
peret DE , latus triaguli æquilateri, excessu AB , sic pater.
Ductâ DB ; erunt anguli CDB , CBD , ob æqualitatẽ la-
terum CB , CD , inter se æquales. Quare ablati ipsis ab
æqualibus angulis CDE , CBE ; remanebunt anguli
 BDE , DBE æquales inter se. Adeoque recta DE rectæ
 BE æqualis erit; Est autem AB excessus, quo diame-
ter

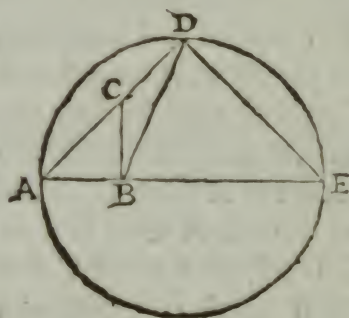


ter AE superat rectam BE ; igitur AB excessus etiam erit, quo eadem diameter AE , circuli ADE , superat DE latus trianguli æquilateri in eodem circulo ADE inscripti. Dato igitur excessu, quo diameter circuli superat, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. XVII. PROPOS. XVII.

Dato excessu, quo diameter circuli superat latus quadrati in eodem circulo inscripti, inveniendus est circulus.

Oportet invenire circulum, cujus diameter superet latus quadrati in eodem circulo inscripti dato excessu AB . Erigatur perpendicularis BC ad rectam AB , quæ eidem AB sit æqualis, & adjuncta AC producat in D , ita ut CD æqualis sit ipsi CB . Deinde DE perpendicularis ad AD occurrat rectæ AB productæ in E . Dico circulum AED , circa diametrum AE descriptum, qui necessario per punctum D transit, esse de quo quæritur. Quoniam igitur angulus ADE rectus est, angulus vero DAE semirectus; erit etiam reliquus angulus AED semirectus; Quare, per secundum lemma, DE latus erit quadrati in circulo ADE inscripti. Cû autem angulus CDE æqualis sit angulo CBE , & ablatus CDB ablato CBD æqualis, ob æqualitatē laterum CD , CB ; erit reliquus angulus BDE reliquo angulo DBE æqualis; Quapropter latera DE , BE æqualia inter se erunt; Superat autem diameter AE rectam BE excessu AB ; ergo eadem



D

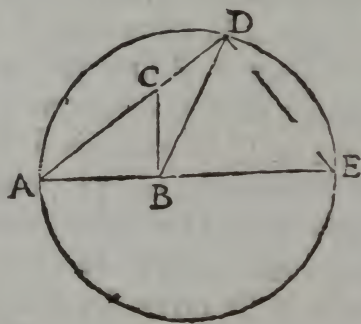
dia-

diameter $A E$ superabit $D E$, latus scilicet quadrati in eodem circulo $A D E$ inscripti, dato excessu $A B$. Dato igitur excessu, quo diameter circuli superat latus quadrati, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. XVIII. PROPOS. XVIII.

Dato excessu, quo diameter circuli superat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscripti, invenire circumulum.

Sit $A B$ excessus, quo diameter circuli superat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscripti. Inveniendus est circumulus. Constituatur ad punctum A angulus $B A C$, qui sit duæ quintæ unius recti, & perpendicularis $B C$ occurrat $A C$ in C . Producatâ deinde $A C$ in D , ut sit $C D$ æqualis rectæ $C B$, erigatur ad $A D$ perpendicularis $D E$ occurrēs $A B$ productæ in E . Dico circumulum $A E D$, circa triangulum $A D E$ descriptum, esse quæsitum. Quoniam igitur triangulum $A D E$ rectangulū est; erit latus $A E$ diameter circuli $A E D$. Et quia angulus $A D E$ rectus est; erunt anguli $D A E$, $D E A$ simul angulo recto æquales; Est autem angulus $D A E$ duæ quintæ unius recti; ergo angulus $D E A$ tres quintæ erit unius recti; Itaque, per tertium lemma, $D E$ latus erit pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo $A E D$ inscripti. Cum autem anguli $C B D$, $C D B$ æquales inter se sint, ob laterū $C B$,
 $C D$

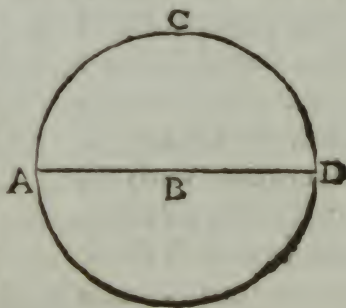


C D æqualitatem : Ablatis ipsis ab angulis rectis C D E, C B E ; remanebunt anguli B D E, D B E inter se æquales ; Ac propterea D E æqualis erit rectæ B E ; Atqui B E superatur à diametro A E excessu A B ; ergo D E, latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo A E D inscripti, superabitur ab eadem diametro A E excessu dato A B. Dato igitur excessu, quo diameter circuli superat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscripti, inventus est circulus. Quod erat faciendum.

PROBL. XIX. PROPOS. XIX.

Dato excessu, quo diameter circuli superat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscripti, invenire circulum.

Invenire oportet circulum, cujus diameter superet latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscripti excessu dato A B. Centro B, intervallo vero B A describatur circulus A C D. Quem dico esse quæsītū. Producat A B in D. Quoniam igitur, per coroll. propof. 15. 4. elem., latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in circulo A C D inscripti æquale est semidiametro B D, & diameter A D superat semidiametrum B D excessu A B ; superabit propterea diameter A D, circuli A D C, latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo A D C inscripti, excessu dato A B. Dato igitur excessu, quo diameter circuli su-



D 2

pe-

productæ in E, & erectâ ad A F perpendiculari F G, quæ
 A C productæ occurrat in G, describatur circa triangulū
 A F G, circulus A F G H. Quem dico esse quæsitum. Pro-
 ducatur A B in H, junganturque F H, D B. Quoniam er-
 go triagulum A F G, est rectangulum; erit latus A G, an-
 gulo recto A F G oppositum, diameter circuli. Quare A
 H erit, per primum præmissum lemma, latus trianguli
 æquilateri, A F vero, per secundum lemma, erit latus
 quadrati, in eodem circulo A F G H inscriptorum. Cum
 autem D E parallela sit F B: erunt anguli A D E, A
 E D, trianguli E D A, æquales angulis A F B, A B F,
 trianguli B F A, uterque utrique; ergo triangu-
 la E D A B F A æquiangula erunt. Quare latera A D, D E, A F,
 F B, quæ sunt circa æquales angulos A D E, A F B pro-
 portionalia erunt; hoc est ut A D ad D E, ita A F ad
 F B. Et rursus quia, ex antecedente, quod quarto loco
 præmissum est, lemmate, D B parallela est rectæ F H;
 erit angulus D B E, trianguli E D B, æqualis angulo F
 H B, trianguli B F H: est autem angulus D E B angu-
 lo F B H æqualis, quia D E, F B etiam parallelæ sunt
 inter se: igitur triangu-
 la E D B, B F H æquiangula in-
 ter se erunt: Ac ideo erit ut D E ad E B, ita F B ad B
 H: Quare cum sit ut A D ad D E, ita A F ad F B, & ut
 D E ad E B, ita F B ad B H; erit ex æquo ut A D ad
 E B, ita A F ad B H; Sed A D, E B inter se sunt æqua-
 les: igitur A F, B H inter se æquales erunt. Superat
 autem recta A H, quæ latus est trianguli æquilateri in
 circulo A F G H inscripti, rectam B H excessu A B:
 ergo igitur idem latus A H superabit A F, latus qua-
 drati in eodem circulo A F G H inscripti, eodem ex-
 cessu dato A B. Dato igitur excessu, quo latus trianguli
 æquilateri superat latus quadrati in eodem circulo in-
 scriptorum, inventus est circulus. Quod erat faciendum.

PRO-

ganturque rectæ DC , DK , & productâ semidiametro AF in H , ducantur rectæ GF , GH . Quoniam igitur anguli ADK , AGH inter se sunt æquales, ambo enim sunt recti, erunt DK , GH inter se parallelæ; Ideoque angulus DKA angulo GHA æqualis erit: Sed angulus DCA duplus est anguli DKA , angulus verò $GF A$ duplus anguli GHA ; ergo angulus DCA , trianguli ADC , æqualis erit angulo GFA , trianguli AGF . Est autem angulus GAF communis: ergo triangula ADC , AGF æquiangula inter se erunt. Quare erit ut AD ad DC ; hoc est ad CB , ita AG ad GF ; hoc est ad FI . Rursus quia FB parallela est rectæ CE , erit angulus FBI , trianguli FBI , æqualis angulo CEB , trianguli ECB : est autem angulus FIA æqualis angulo FAI : hoc est angulo CBE : ergo triangula FBI , ECB æquiangula inter se erunt; Ac proinde erit ut CB ad BE , ita FI ad IB . Quare cum sit AG ad FI , ut AD ad CB , & FI ad IB , ut CB ad BE ; erit ex æqualitate AG ad IB , ut AD ad BE ; Atqui AD , BE inter se sunt æquales; ergo igitur AG , IB inter se æquales erunt. Superat autem AI rectam BI excessu AB ; igitur AI , quæ, per primum lemma, est latus trianguli æquilateri in circulo $AGHI$ inscripti, superabit rectam AG , quæ, per tertium lemma, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo $AGHI$ inscripti, excessu dato AB . Itaque dato excessu, quo latus trianguli æquilateri superat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum invenimus circulum. Quod faciendum erat.

PRO-

33

tus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorū, inventus est circulus. Quod erat faciendū.

PROBL. XXIII. PROPOS. XXIII.

Dato excessu, quo latus quadrati superat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum, invenire circulum.

SIt datus excessus AB , quo latus quadrati superat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorū.

Oportet igitur invenire circulū.

Ad puncta A , & B constituentur

duo anguli ABC , BAC , quorum

uterq; sit semirectus, & rectæ AC ,

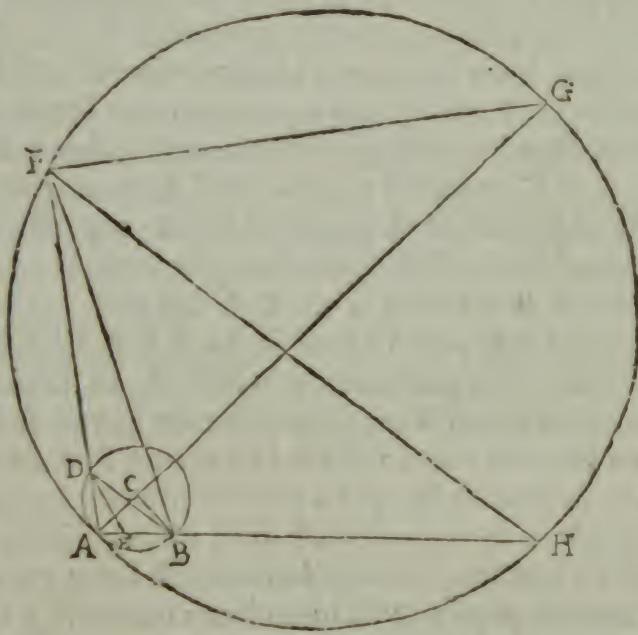
BC coeant in puncto C .

Deinde cētro C intervallo verò

CA , vel CB , describatur circulus ADB , in quo accommodetur recta AD ,

E

quæ

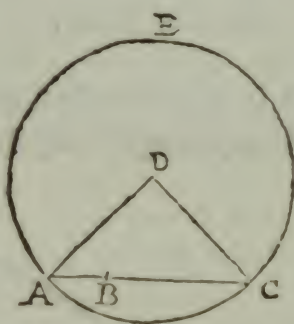


quæ constituat cum semidiametro $A C$ angulum $D A C$ æqualem tribus quintis unius recti, sumaturque ex $A B$ recta $B E$ æqualis rectæ $A D$, (nimirum $A B$ major est quam $A D$, nam $A B$, per secundum lemma, est latus quadrati, $A D$ verò, per tertium lemma, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum) & adjunctæ $D E$ æquedistans agatur $B F$, occurrens $A D$ productæ in F , & $F G$ perpendicularis ad $A F$, occurrat $A C$ in G productæ. Dico circum $A F G H$, circa triangulum rectangulum $A G F$ descriptum, esse de quo quæritur. Producatur $A B$ in H , iungaturque rectæ $D B$, $F H$. Quoniam igitur $B F$ parallela est rectæ $E D$; erunt anguli $A F B$, $A B F$, trianguli $B F A$, æquales angulis $A D E$, $A E D$, trianguli $E D A$, uterque utrique; Ac proinde triangula $B F A$, $E D A$ æquiangularia inter se erunt; idcirco erit $A F$ ad $F B$, ut $A D$ ad $D E$. Rursusque quia, per quartum lemma, rectæ $D B$, $F H$ sunt inter se parallellæ; erit angulus $F H B$, trianguli $B H F$, æqualis angulo $D B E$, trianguli $E B D$; sed est angulus $F B H$ angulo $D E B$ æqualis: ergo triangula $B H F$, $E D B$ æquiangularia inter se erunt; Quare erit $F B$ ad $B H$, ut $D E$ ad $E B$. Itaque cum sit $A F$ ad $F B$, ut $A D$ ad $D E$, & $F B$ ad $B H$, ut $D E$ ad $E B$; erit ex æqualitate $A F$ ad $B H$, ut $D A$ ad $E B$: sunt autem $D A$, $E B$ æquales inter se; igitur $A F$, $B H$ æquales inter se erunt: sed $A H$ superat $B H$ excessu $A B$; igitur eadem $A H$, quæ, per secundum lemma, est latus quadrati in circulo $A F G H$ inscripti, superabit rectam $A F$, quæ, per tertium lemma, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo $A F G H$ inscripti, excessu dato $A B$. Dato igitur excessu, quo latus quadrati superat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum, invenimus circum. Quod erat faciendum.

PRO-

Dato excessu, quo latus quadrati superat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum, circulum invenire.

Sit AB excessus, quo latus quadrati superat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum. Oportet igitur invenire circulum. Ad rectam AB , per propositionem 13. hujus, adjungatur recta BC , ita ut quadratum totius AC duplum sit quadrati adjunctæ BC . Deinde ad puncta A , & C constituatur duo anguli DAC , BCA , quorum uterque sit semirectus, & rectæ AD , CD sibi in puncto D occurrant. Denique centro D , intervallo verò DA , vel DC , describatur circulus ACE . Quem dico esse quaesitum. Quoniã igitur anguli DAC , BCA simul æquales sunt angulo recto; erit angulus ADC rectus: quare quadratum AC æquale erit quadratis AD , CD ; sed quadrata AD , CD sunt inter se æqualia; ergo quadratum AC duplum erit quadrati DC ; sed idem quadratum AC duplum est quadrati BC : igitur quadrata BC , CD æqualia inter se erunt. Rectæ igitur BC , CD æquales sunt inter se; superat autem AC rectam BC excessu AB ; ergo igitur eadem AC , quæ, per secundum lēma est latus quadrati in circulo ACE inscripti, superabit semidiametrum DC ; hoc est latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodē circulo ACE inscripti, excessu duo AB . Itaque dato excessu; quo latus qua-

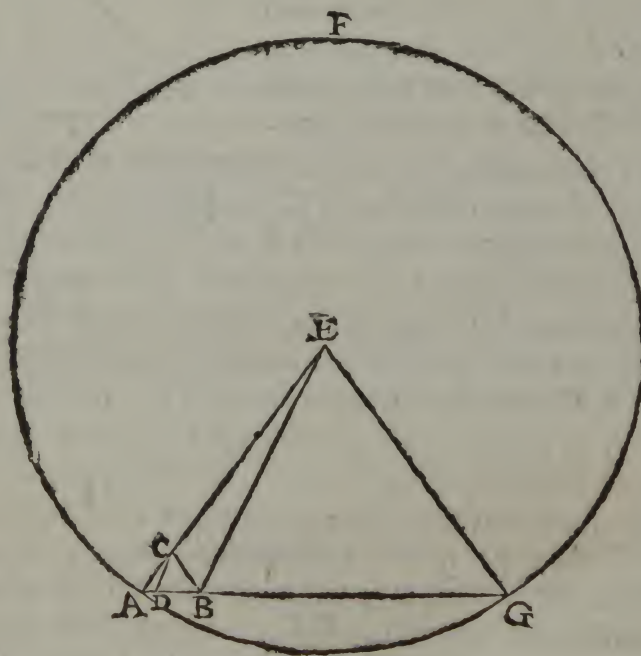


drati superat latus hexagoni æquilateri, & æquiāguli in eodem circulo inscriptorum, invenimus circulum. Quod erat faciendum .

PROBL. XXV. PROPOS. XXV.

Dato excessu , quo latus pentagoni æquilateri , & æquianguli superat latus hexagoni æquilateri , & æquianguli in eodem circulo inscriptorum, circulum invenire .

S It A B excessus, quo latus pentagoni æquilateri , & æquianguli superat latus hexagoni æquilateri , &



æquianguli in eodem circulo inscriptorum. Oportet inven-

venire circulum . Constituatur , ex antecedente , quod sexto loco præmissum est, lemmate , super $A B$ triangulum isosceles $A B C$, cujus uterque eorum , qui ad basim $A B$ sunt, angulorum, æqualis sit tribus quintis unius recti, & ex $B A$ sumatur $B D$ æqualis rectæ $B C$. Deinde adjunctæ $D C$ æquedistans agatur $B E$, occurrens $A C$ productæ in E , & centro E , intervallo verò $E A$, describatur circulus $A F G$. Quem dico esse quæsitum . Producat $A B$ in G , jungaturque $E G$. Quoniam igitur angulus $E G B$, trianguli $B G E$, æqualis est angulo $E A G$; hoc est angulo $C B D$, trianguli $D B C$, & angulus $E B G$ angulo $C D B$ æqualis; erit reliquus angulus $B E G$ reliquo angulo $D C B$ æqualis : Atqui anguli $B D C$, $B C D$ sunt inter se æquales ; igitur anguli $G B E$, $G E B$ inter se æquales erunt . Quare rectæ $B G$, $E G$ æquales inter se sunt; sed $A G$, quæ, per tertium lemma, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo $A F G$ inscripti, superat $B G$ excessu $A B$; ergo superabit etiam semidiametrum $E G$: hoc est latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo $A F G$ inscripti, excessu dato $A B$. Itaque excessu dato, quo latus pentagoni æquilateri, & æquianguli superat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum, inventus est circulus . Quod facere oportebat .

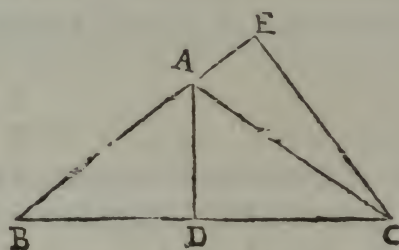
THEOREMA I. PROPOS. XXVI.

In triangulis amblygonijs, perpendicularis ducta ab angulo obtuso ad latus oppositum dividet illud, ita ut rectangulum contentum sub ipsius segmentis majus erit quadrato perpendicularis, rectangulo contento sub uno reliquorum laterum ;

in

in quod protractum altera cadit perpendicularis,
& sub exterius assumptâ inter hanc perpendicu-
larem, & angulum obtusum.

IN triangulo ABC obtusangulo, cadat ab angulo
obtuso BAC ad latus oppositum BC perpendicu-
laris AD , & ad alterum
reliquorum laterum pro-
tractum; hoc est ad latus B
 A cadat altera perpendicu-
laris CE . Dico rectangu-
lû $BD C$ majus esse qua-
drato AD , rectangulo BAE .
Quoniam igitur qua-
drata BA , AC , & duplum
rectanguli BAE simul æqualia sunt quadrato BC , &
eidem quadrato BC æqualia sunt quadrata BD , DC ,
& duplum rectanguli $BD C$; erunt quadrata BD , DC
& duplum rectanguli $BD C$ simul æqualia quadratis BA ,
 AC , & duplo rectanguli BAE ; sunt autem quadra-
tis BA , AC æqualia quadrata BD , DC , & quadra-
tum DA bis sumptum: igitur quadrata BD , DC , &
duplum rectanguli $BD C$ æqualia erunt quadratis BD ,
 DC , & quadrato AD bis sumpto, & duplo rectanguli
 BAE : ablatis igitur communibus quadratis BD , DC ,
remanebit duplum rectanguli $BD C$ æquale quadrato
 AD bis sumpto, & duplo rectanguli BAE : Est
autem rectangulum $BD C$ pars dimidia dupli re-
ctanguli $BD C$, & quadratum AD una cum re-
ctangulo BAE , est etiam pars dimidia quadrati
 AD bis sumpti, & dupli rectanguli BAE ; ergo
igitur rectangulum $BD C$ æquale erit quadrato AD ,
& rectangulo BAE ; hoc est rectangulum $BD C$ majus
erit

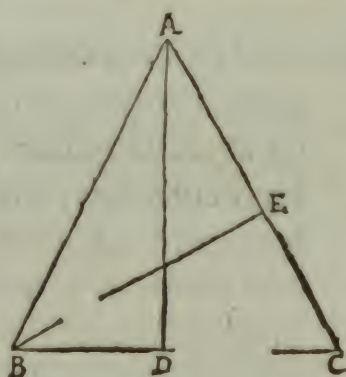


erit quadrato AD , rectangulo BAE . Quare in triangulis amblygonijs perpendicularis ducta, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA II. PROPOS. XXVII.

In oxygonijs triangulis, perpendicularis ducta ab uno angulorum ad latus oppositum dividet illud, ita ut rectangulum contentum sub ipsius segmentis, minus erit quadrato perpendicularis, rectangulo contento sub uno reliquorum laterum, in quod altera perpendicularis cadit, & sub interius assumptâ inter hanc perpendicularem, & angulum à quo prima perpendicularis ducta est.

IN triangulo ABC acutangulo, cadat ab uno angulorum BAC ad latus oppositum BC perpendicularis AD , & ad alterum reliquorum laterum; hoc est ad latus AC altera perpendicularis cadat BE . Dico rectangulum BDC minus esse quadrato AD rectangulo CAE . Quoniam igitur quadratum BC una cum duplo rectanguli CAE æquale est quadratis AB, AC , & eisdem quadratis AB, AC æqualia sunt quadrata BD, DC , & quadratum AD bis sumptum; Igitur quadratum BC una cum duplo rectanguli CAE æquale erit quadratis BD, DC , & quadrato AD bis sumpto; sunt autem quadrato BC æqualia quadrata BD, DC , & duplum



re-

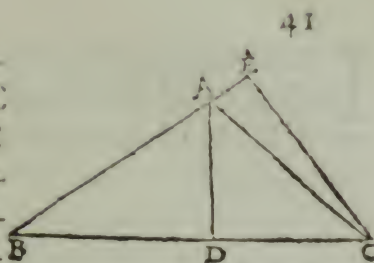
rectanguli BDC ; igitur quadrata BD, DC , & duplū rectanguli BDC , vna cum duplo rectanguli CAE simul æqualia erunt quadratis BD, DC , & quadrato AD bis sumpto; Quare ablati communibus quadratis BD, DC , remanebunt duplum rectanguli BDC , & duplum rectanguli CAE simul æqualia quadrato AD bis sumpto; Est autem rectangulum BDC vna cum rectangulo CAE pars dimidia dupli rectanguli BDC , & dupli rectanguli CAE , atque quadratum AD pars dimidia est etiam quadrati AD bis sumpti; igitur erit rectangulum BDC vna cum rectangulo CAE æquale quadrato AD ; hoc est rectangulum BDC minus erit quadrato AD , rectangulo CAE . In oxygonijs igitur triangulis perpendicularis ducta ab uno angulorum &c. Quod erat ostendendum.

THEOREMA III. PROPOS. XXVIII.

In amblygonijs triangulis, perpendicularis ducta ab angulo obtuso ad latus oppositum dividet illud, ita ut rectangulum contentum sub toto, & uno segmentorum, majus erit quadrato lateris dicto segmento adjacentis, rectangulo contento sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod protractum altera cadit perpendicularis, & sub exterius assumptâ inter perpendicularem, & angulum obtusum.

IN

IN triangulo ABC obtufan-
 gulo, ab âgulo obtufo BAC
 cadat ad latus oppofitum BC
 perpendicularis AD , & ad alte-
 rutrum laterû, quæ sût circa ob-
 tufum angulum; hoc est ad la-
 tus BA protractum altera ca-
 dat perpendicularis CE . Dico rectangulum BCD ma-
 jus esse quadrato CA , rectangulo BAE . Quoniam,
 igitur rectangulum BCD æquale est quadrato DC
 atq; rectangulo $BD C$; & rectangulum $BD C$ æquale est
 quadrato AD , & rectângulo BAE per propof. 26. hujus;
 igitur rectangulum BCD æquale erit quadratis DC ;
 AD , & rectangulo BAE ; Atqui quadratis DC , AD
 æquale est quadratum CA ; igitur rectangulum BCD
 æquale erit quadrato CA , & rectangulo BAE ; hoc est
 rectangulum BCD majus erit quadrato CA , rectan-
 gulo BAE . In Amblygoniis igitur triangulis perpen-
 dicularis ducta ab angulo obtufo, &c. Quod demon-
 strandum erat.



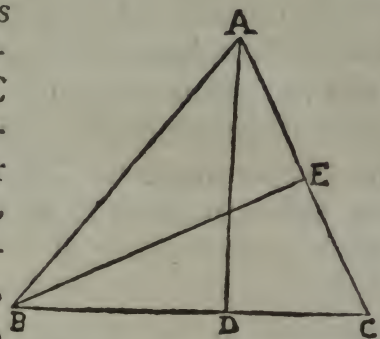
THEOREMA IV. PROPOS. XXIX.

In oxygoniis triangulis, perpendicularis ducta ab
 uno âgulorum ad latus oppofitum dividet illud,
 ita ut rectangulum contentum sub toto, & uno
 segmentorum minus erit quadrato lateris dicto
 segmento adjacentis, rectangulo contento sub
 uno reliquorum laterum, in quod altera perpen-
 dicularis cadit, & sub interius assumpta inter hanc
 perpendicularem, & angulum à quo prima per-
 pendicularis ducta est.

F

IN

IN triangulo ABC acutangulo, ab uno angulorum BAC ad latus oppositum BC cadat perpendicularis AD , & ad alterum reliquorum laterum; hoc est ad latus AC cadat altera perpendicularis BE . Dico rectangulum BCD minus esse quadrato CA , rectangulo CAE . Quoniam igitur quadrata AD , DC æqualia sunt quadrato AC , & quadratum AD , per propof. 27. hujus, æquale est rectangulis BD , C , CAE : erunt rectangula BD , C , CAE , una cum quadrato DC æqualia quadrato AC ; Sed rectangulum BD , C , una cum quadrato DC æquale est rectangulo BC , D ; Igitur rectangulum BC , D , una cum rectangulo CA , E æquale erit quadrato AC ; hoc est rectangulum BC , D minus erit quadrato AC , rectangulo CA , E . Quare in oxygoniis triangulis perpendicularis ducta ab uno angulorum, &c. Quod erat demonstrandum.

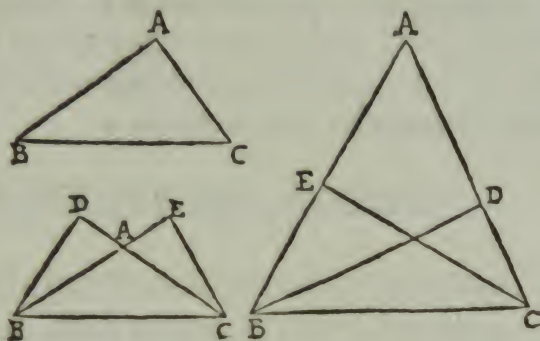


THEOREMA V. PROPOS. XXX.

In quocunque triangulo, si à duobus angulis ad latera opposita duæ perpendiculares demittantur, versus easdē partes; quadratum reliqui lateris æquale erit rectangulis contentis sub lateribus in quæ perpendiculares cadunt, & sub eorundem segmentis inter perpendiculares, & reliquum latus interpositis.

IN

IN triangulo ABC , ab angulis ABC, ACB demittantur ad latera opposita AC, AB perpendiculares BD, CE quę versuſ easdē partes cadāt. Dico quadratum reliqui lateris BC ęquale esse rectangulis ABE, ACD . Vel igitur reliquus angulus BAC est rectus,



vel acutus, vel obtusus. Si rectus, ut in 1. figura, cadent perpendiculares ductę ab angulis ABC, ACB ad latera opposita AC, AB in puncto A ; Quare manifestum est quadratum ex BC ęquale esse rectangulis ABA, ACA ; hoc est quadratis AB, AC . Si vero angulus BAC sit acutus, ut in 2. figura: erit quadratum ex BC , una cum duplo rectanguli CAD , vel duplo rectanguli BAE ęquale quadratis AB, AC ; hoc est quadratum BC ; una cum rectangulis CAD, BAE ęquale erit quadratis AB, AC ; sed quadratum AB ęquale est rectangulis BAE, ABE , quadratum vero AC ęquale rectangulis CAD, ACD ; igitur quadratum BC una cum rectangulis CAD, BAE ęquale erit rectangulis ABE, BAE, ACD, CAD . Quare ablatis communibus rectangulis CAD, BAE , remanebit quadratum BC ęquale rectangulis ABE, ACD . Sit denique angulus BAC obtusus, ut in 3. figura; erit quadratum BC ęquale quadratis AB, AC , & duplo rectanguli BAE , vel duplo rectanguli CAD ; hoc est quadratum BC ęquale erit quadratis AB, AC , & rectangulis BAE, CAD : sed quadratum BA , una cum rectangulo

E 2

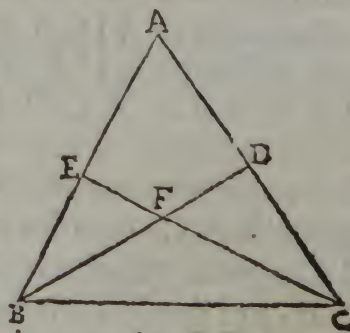
B

$B A E$ æquale est rectangulo $A B E$, & quadratum $A C$, una cum rectangulo $C A D$ æquale est rectangulo $A C D$: ergo igitur quadratum $B C$ æquale erit rectangulis $A B E$, $A C D$. In quocunque igitur triangulo, si à duobus angulis ad latera opposita duæ perpendiculares, &c. Quo demonstrare oportebat.

THEOR. VI. PROPOS. XXXI.

In quocunq; triangulo acutangulo, si à duobus angulis ad latera opposita duæ perpendiculares se mutuo secantes demittantur: rectangula contenta sub letaribus in quæ perpédiculares cadunt, & sub eorundem segmentis inter perpendiculares, & reliquum latus interpositis æqualia erunt rectangulis contentis sub perpendicularibus, & sub earundem segmentis reliquo lateri adjacentibus.

IN triangulo acutangulo $A B C$, ab angulis $A B C$, $A C B$ ad latera opposita $A C$, $A B$ demittantur perpendiculares $B D$, $C E$, quæ se mutuo secant in F . Dico rectangula $A B E$, $A C D$ æqualia esse rectangulis $E C F$, $D B F$. Quoniam igitur angulus $B A C$ est acutus; erunt (ut in secunda parte propositionis antecedentis demonstravimus) rectangula $A B E$, $A C D$ quadrato $B C$ æqualia. Et rursus quia angulus $B F C$ major est angulo recto $F D C$; erit ipse obtusus; adeoq; (ut in ter-

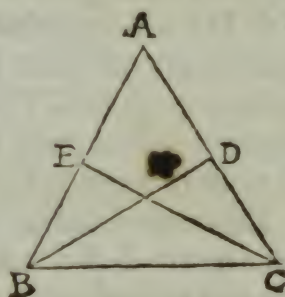


tertia parte præcedentis propositionis demonstravimus) erunt rectangula DBF , ECF eidem quadrato BC æqualia; ac propterea rectangula ABE , ACD rectangulis ECF , DBF æqualia erunt. In quocunque igitur triangulo acutangulo si à duobus angulis ad latera opposita duæ perpêdiculares, &c. Quod erat demonstradû.

THEOREMA VII. PROPOS. XXXII.

In quocunque triangulo acutangulo, si à duobus angulis ad latera opposita duæ perpêdiculares demittantur; latera in quæ perpêdiculares cadunt eandem proportionem habebunt, ac perpêdiculares.

IN triangulo acutangulo ABC sint ab angulis A , B , C , ACB ad opposita latera AC , AB ductæ perpêdiculares BD , CE . Dico latera AB , AC , eandem inter se proportionem habere, ac perpêdiculares AD , CE . Quoniam igitur angulus BDA , trianguli BAD , æqualis est angulo CEA , trianguli CAE , angulus vero DAB communis; erit reliquus angulus ABD reliquo angulo ACE æqualis: æquiangula sunt igitur triangula BAD , CAE ; adeoque erit AB , ad BD , ut AC ad CE ; igitur permutando ut AB , ad AC ita BD , ad CE . In quocunque igitur triangulo acutangulo, si à duobus angulis ad latera opposita, &c. Quod erat demonstrandum.

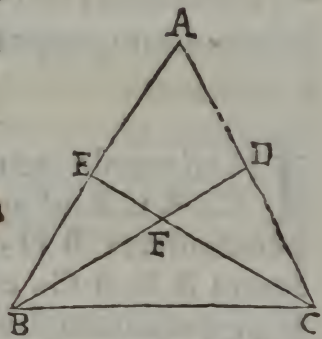


THEO-

THEOREMA VIII. PROPOS. XXXIII.

In quocunque triangulo acutangulo, rectæ à duobus angulis ad latera opposita ductæ, si fuerint perpendiculares; facient cum reliquo latere duos angulos reliquo angulo æquales; Et si fecerint cum reliquo latere duos angulos reliquo angulo æquales, & una earum perpendicularis fuerit; altera perpendicularis erit.

IN triangulo acutangulo ABC , sint BD , CE perpendiculariter ductæ ab angulis A , B , C ad latera AC , AB . Dico angulos DBC , ECB simul æquales esse reliquo angulo BAC . Quoniam igitur angulus CEA , trianguli AEC , æqualis est angulo FDC trianguli CDF , & angulus DCF communis; erit reliquus angulus EAC reliquo angulo CFD æqualis; atqui angulus CFD æqualis est angulis FCB , FBC ; igitur angulus BAC eisdem angulis FBC , FCB æqualis erit.



Iam vero contra, sint anguli FBC , FCB simul æquales angulo BAC , & BD sit perpendicularis. Dico CE perpendicularem etiam esse. Quoniam igitur angulus BAC æqualis est angulis FBC , FCB , & eisdem angulis FBC , FCB æqualis est angulus DFC ; erunt anguli BAC , DFC æquales inter se; quare cum duo anguli EAC , ECA , trianguli EAC , æquales sint duobus angulis DFC , DCF , trianguli DCF , uterque erit reliquus CEA reliquo FDC æqualis; sed angulus FD

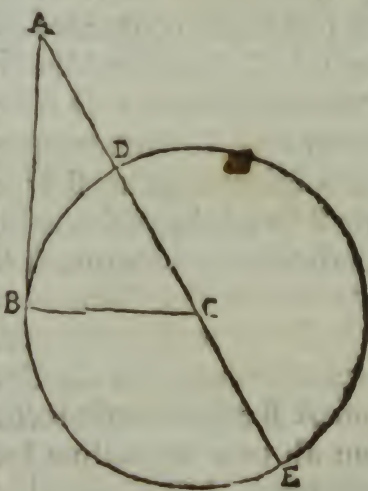
Cre-

C rectus est; igitur C E A rectus erit; ac ideo C E perpendicularis. In quocunque igitur triangulo acutangulo, rectæ à duobus angulis, &c. Quod erat demonstrandū.

THEOREMA IX. PROPOS. XXXIV.

In quolibet triangulo rectangulo, quadratum descriptum à quovis latere eorum, quæ rectum angulum comprehendunt æquale est rectangulo comprehenso à composita ex hypotenusa, & reliquo latere tanquam ab una linea, & ab excessu quo hypotenusa idem latus superat.

IN triangulo rectangulo A B C, quadratum descriptum à quovis latere eorum, quæ angulum rectum A B C comprehendunt, puta à latere A B, æquale est ei, quod sub composita ex hypotenusa A C, & reliquo latere C B tanquam ab una recta linea, & sub excessu, quo hypotenusa A C superat idē latus C B continetur, rectangulo. Facto centro C, intervallo vero C B describatur circulus B D E, producatque A C in E. Quoniam igitur A B perpendicularis est ad semidiametrum C B; erit tangens circulum B D E; ac propterea quadratum tangentis A B erit æquale ei, quod sub secante A E, & exterius assumpta D A continetur, rectangulo: sed secans A E composita est ex hypotenusa A C, & ex C



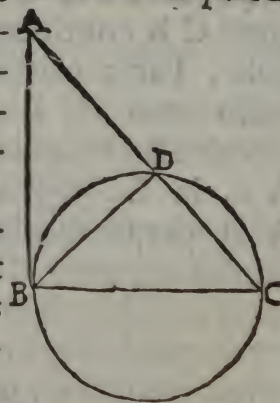
E hoc

E, hoc est ex reliquo latere CB , & exterius assumpta AD est excessus, quo hypotenusam AC idem latus CB superat; igitur quadratum lateris AB æquale est rectangulo contento sub composita ex hypotenusam AC , & reliquo latere CB , & sub excessu AD , quo hypotenusam AC idem latus CB superat. In quolibet igitur triangulo rectangulo, quadratum descriptum à quovis latere eorum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA X. PROPOS. XXXV.

In triangulo isoscele rectangulo, quadratum ab uno æqualium laterum descriptum æquale est ei, quod ab hypotenusam, & à dimidia hypotenusam comprehenditur rectangulo.

IN triangulo isoscele rectangulo ABC , quadratum descriptum ab uno æqualium laterum AB æquale est rectangulo contento ab hypotenusam AC , & à dimidia ejusdem. Describatur circulus DBC , cujus diameter sit BC , jungaturque BD . Quoniam igitur angulus BDC rectus est, erit BD ad hypotenusam AC perpendicularis; adeoque AC divisa erit bifariam in D . Cum autem angulus ABC rectus sit; erit recta AB tangens circulum DBC ; Quare quadratum AB æquale erit rectangulo CAD ; hoc est quadratum ab uno æqualium laterum AB , trianguli isoscelis rectanguli ABC æquale erit rectangulo comprehenso ab hypotenusam AC , & ab ipsius dimidia AD . Itaque



in

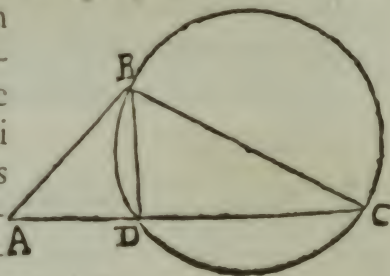
in triangulo isoscele rectangulo, quadratū ab uno æqualium laterum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XI. PROPOS. XXXVI.

Si ab angulo recto, trianguli rectanguli, perpendicularis ad basim ducta fuerit; rectangulum quod sub hypotenusa, & uno segmentorum continetur æquale erit quadrato ejusdem segmenti, & ei, quod sub ambobus segmentis continetur rectangulo.

A B angulo recto ABC , trianguli rectanguli BAC , demittatur ad basim AC perpendicularis BD .

Dico, rectangulum contentum sub hypotenusa AC , & alterutro segmentorū, AD æquale esse quadrato dicti segmenti AD , & ei, quod sub ambobus segmentis AD , DC continetur, rectangulo. Circa diametrum BC describatur circulus



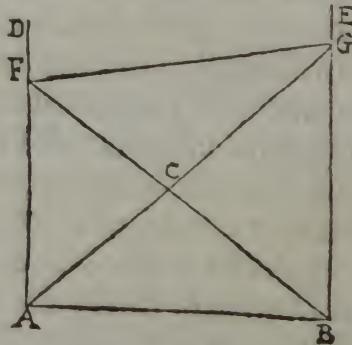
BCD , qui necessario transibit per punctum D . Quoniam igitur AB perpendicularis est ad diametrum BC ; erit tangens circulum BCD ; quare rectangulum CAD quadrato AB erit æquale; sed eidem quadrato AB æqualia sunt quadrata AD , BD ; igitur rectangulum CAD quadratis AD , BD erit æquale; est autem quadratum BD æquale rectangulo ADC ; ergo rectangulum CAD æquale erit quadrato AD , & rectangulo ADC . Si igitur ab angulo recto, trianguli rectanguli, perpendicularis ad basim ducta fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

EX hujus propositionis demonstratione patet, si ab angulo recto, trianguli rectanguli perpendicularis, ad basim ducta fuerit; rectangulum sub ipsa, & uno segmentorum comprehensum æquale esse quadrato dicti segmenti, & quadrato perpendicularis.

THEOR. XII. PROPOS. XXXVII.

Si à duobus extremis punctis lateris cujuscunque trianguli duæ perpendiculares ad idem latus erigantur, & reliqua latera producantur donec perpendicularibus utcunque productis occurrant: rectangulum comprehensum sub lateribus productis æquale erit ei, quod ab adjunctis comprehenditur, rectangulo.

A Duobus extremis punctis A, B lateris A B, trianguli A B C, erigantur perpendiculares A D, B E ad idem latus B C; & reliqua latera A C, B C producantur donec occurrant perpendicularibus in F, G. Dico rectangulum contentum sub lateribus A C, B C æquale esse ei, quod sub adjunctis F C, C G continetur, rectangulo. Adjungatur recta F G. Quoniam igitur triangula B F G, G A B sunt inter se æqualia, ablato communi triangulo B C G; erit triangulum A C B triangulo F C G æquale: est autem angulus A C B, trianguli A B C, æqualis angulo F C G, triânguli G C F: igitur latera A C, C B

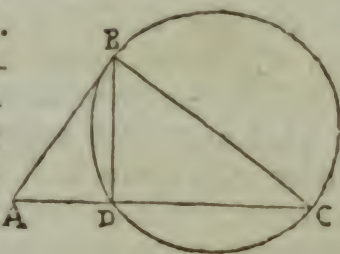


CB, trianguli ACB, lateribus FC, CG, trianguli GCF erunt reciproca: hoc est erit ut AC ad CG, ita FC ad CB; ac ideo rectangulum contentum sub extremis AC, CB æquale erit ei, quod sub medijs FC, CG continetur, rectangulo. Itaque si à duobus extremis punctis lateris cujuscunque trianguli duæ perpendiculares, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. XIII. PROPOS. XXXVIII.

Si ab angulo recto, trianguli scaleni rectanguli, perpendicularis ad basim ducta fuerit, secans eam in partes inæquales, majus vero segmentum minori lateri eorum, quæ sunt circa rectum angulum, sit æquale; basim extrema, ac media ratione à perpendiculari secabitur.

AB angulo recto ABC, trianguli scaleni rectanguli BAC, ducatur ad basim AC perpendicularis BD, dividens eam in partes inæquales, sitque majus segmentum DC æquale minori lateri AB. Dico, basim AC extrema, ac media ratione sectam esse in D. Describatur circa diametrum BC circulus BCD, qui transibit per punctum D. Quoniam igitur angulus ABC rectus est; erit AB tangens circumulum DCB; adeoque quadratum AB æquale erit rectangulo CAD; est autè recta DC æqualis rectæ AB; igitur quadratū DC æquale erit etiam rectangulo CAD; quare erit tota AC ad majus segmentum DC, ut majus segmentum



G 2

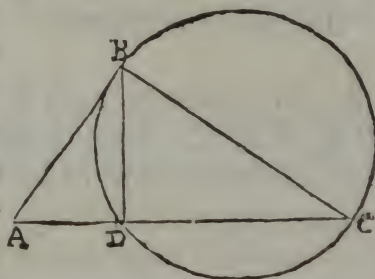
D C

D C ad minus segmentum D A. Extrema igitur, ac media ratione secta est basis A C in D à perpendiculari B D. Quare si ab angulo recto, trianguli scaleni rectanguli, perpendicularis, &c. Quod erat probandum.

THEOR. XIV. PROPOS. XXXIX.

Si ab angulo recto, trianguli scaleni rectanguli, perpendicularis ad basim ducta fuerit, dividens eam extrema, ac media ratione; majus segmentum æquale erit minori lateri eorum, quæ sunt circa angulum rectum.

S It ab angulo recto A B C, trianguli scaleni rectanguli A B C, ducta ad basim A C perpendicularis B D, quæ eam extrema, ac media ratione dividat in D. Dico majus segmentum D C minori lateri A B esse æquale. Describatur circulus D C B, cujus diameter sit B C; transibit igitur circulus D C B per punctum A. Quoniam igitur angulus A B C rectus est; recta A B tanget circulum D C B: Quare quadratum A B æquale erit rectangulo C A D; sed eidem rectangulo C A D æquale est quadratum D C; (extrema enim, ac media ratione secta est A C in D) igitur quadrata A B, D C inter se æqualia erunt; adeoque rectæ A B, D C inter se æquales erunt. Si igitur ab angulo recto, trianguli scaleni rectanguli, perpendicularis, &c. Quod demonstrandum erat.



CO-

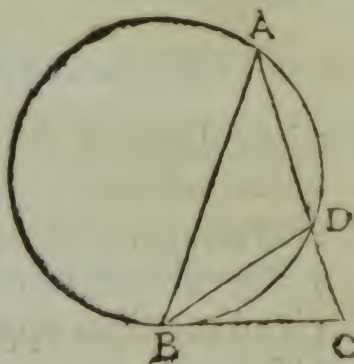
COROLLARIUM.

Hinc sequitur, si ab angulo recto, trianguli scaleni rectanguli, perpendicularis ad basim ducta fuerit, dividens eam extrema, ac media ratione; quadratum majoris segmenti æquale esse quadratis, quæ fiunt alterum à minori segmento, alterum vero à perpendiculari. Ostendimus enim quadratum majoris segmenti DC æquale esse quadrato BA , cui æqualia sunt quadrata, quæ fiunt alterum à minori segmento AB , alterum vero à perpendiculari BD ; ergo quadratum majoris segmenti DC æquale erit quadratis, quæ fiunt alterum à minori segmento AD , alterum vero à perpendiculari BD .

THEOR. XV. PROPOS. XL.

Si triangulum isosceles habuerit utrumque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui, & alteruter æqualium angulorum bifariam sectus fuerit; recta linea secans angulum secabit latus oppositum extrema, ac media ratione.

Triangulum ABC isosceles habeat utrumque eorum, qui ad basim BC sunt, angulorum, duplum reliqui BAC , & recta BD secet bifariam alterutrum æqualium angulorum, ABC . Dico rectam BD secare latus oppositum AC extrema, ac media ratione in D . Circa triangulum ADB describatur circulus BAD . Quoniam igitur angulus DCB duplus est anguli BAC , & angulus DBA æqualis est angulo DAB ; erit angulus DCB æqua-



lis

lis angulis $\angle D B A$, $\angle B A D$; sed eisdem angulis $\angle D B A$, $\angle B A D$ æqualis est angulus $\angle C D B$; igitur anguli $\angle C D B$, $\angle D C B$ inter se æquales erunt; adeoque latus $B C$ lateri $B D$ erit æquale; atqui eidem lateri $B D$ æquale est latus $A D$, ob æqualitatem angulorum $\angle D B A$, $\angle B A D$; igitur latera $B C$, $D A$ inter se erunt æqualia. Cum autem angulus $\angle C B D$ æqualis sit angulo $\angle B A D$; erit $C B$ tangens circum $B A D$; quare quadratum $B C$ æquale erit rectangulo $A C D$; est autem, ex demonstratis, $A D$ æqualis rectæ $B C$; igitur quadratū $A D$ eidem rectangulo $A C D$ erit æquale; ac ideo erit tota $A C$ ad majus segmentum $A D$, ut majus segmentum $A D$ ad minus segmentum $D C$. Extrema, ac media ratione sectū est igitur latus $A C$ in D . Si igitur triangulum isosceles habuerit utrumque eorum, &c. Quod probandum erat.

COROLLARIUM.

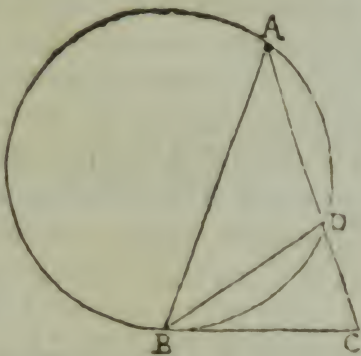
EX hujus propositionis demonstratione manifestum est, si unum æqualium laterum, trianguli isoscelis, cujus utrumque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplus est reliqui, extrema ac media ratione sectum fuerit: majus segmentum æquale esse basi.

THEOR. XVI. PROPOS. XLI.

Si triangulum isosceles habuerit utrumque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui, & alterutrum æqualium laterum extrema, ac media ratione sectum fuerit; recta linea à puncto sectionis ad angulum oppositum ducta dividet illum bifariam.

Ha-

Habeat triangulū isosceles ABC utrumque corū,
 qui ad basim BC sunt, angulorum, duplum reliqui
 BAC , & alterutrum æqualiū
 laterum, AC sit sectum extre-
 ma, ac media ratione in D .
 Dico, rectam DB secare an-
 gulum ABC bifariam. Cir-
 ca triangulum ABD , circulus
 BAD describatur. Quoniam
 igitur, per coroll: propos. præ-
 cedentis, rectæ AD , BC inter
 se sunt æquales; erunt ipsarū
 quadrata inter se æqualia; sed quadratum AD æquale
 est rectangulo ACD ; igitur quadratum BC eidem
 rectangulo ACD erit æquale; quare BC tangens erit
 circulum BAD ; ac propterea angulus CBD angulo
 BAC erit æqualis; est autem angulus BAC subduplus
 anguli ABC ; igitur angulus CBD subduplus etiam
 erit; hoc est pars dimidia ejusdem anguli ABC .
 Quapropter angulus ABC divisus erit bifariam à recta
 DB . Itaque si triangulum isosceles habuerit utrumque
 eorum, qui ad basim sunt, &c. Quod probandum erat.

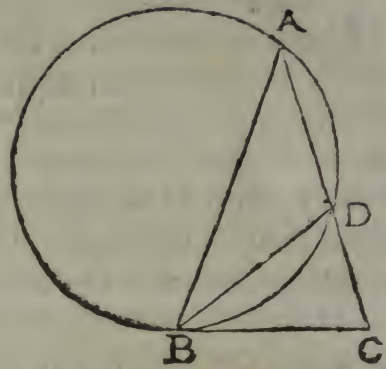


THEOR. XVII. PROPOS. XLII.

Si alterutrum æqualium laterum, trianguli isoscelis,
 extrema, ac media ratione sectum fuerit, & quæ à
 puncto sectionis ad angulum oppositum ducitur
 recta linea dividerit illum bifariam; triangulū ha-
 bebunt utrumque eorum, qui ad basim sunt, angu-
 lorum, duplum reliqui.

Sit triāgulū ABC isosceles, cujus alterutrū æqualiū
 laterū, AC sit sectū extrema, ac media ratione in
 D , &c.

D, & recta D B secet angulum A B C bifariam. Dico triangulum A B C habere utrumque eorum, qui ad basim B C sunt, angulorū, duplum reliqui B A C. Circulus B A D circa triangulum A B D describatur. Quoniam igitur angulus A B C divisus est bifariam



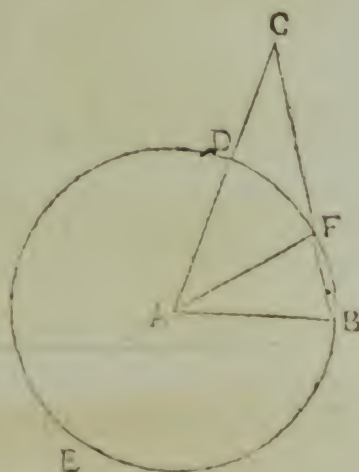
à recta B D; erit ut A D ad D C, ita A B ad B C; sed ut eadē A D ad D C, ita est tota A C ad A D; igitur erit ut A C ad A D, ita A B; hoc est A C ad B C; Itaq; A C ad duas A D, B C eandem habet rationem; Quare A D, B C æquales inter se erunt; est autem quadratum A D æquale rectangulo A C D; (extrema enim, ac media ratione secta est A C in D) igitur quadratum B C eidem rectangulo A C D erit æquale; quare B C tangens erit circulum B A D; ideoq; angulus C B D angulo B A C erit æqualis; atqui anguli C B D duplus est angulus A B C; igitur duplus erit etiam angulus A B C anguli B A C. Ac propterea angulus A C B ejusdem anguli B A C duplus erit, ut potè qui æqualis angulo A B C. Si ergo alterutrum æqualium laterum trianguli isoscelis extrema, ac media ratione sectum, &c. Quod erat probandum.

THEOR. XVIII. PROPOS. XLIII.

Circulus, cujus semidiameter est basis trianguli isoscelis, cujus uterque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplus erit reliqui; secabit ipsius trianguli crura extrema, ac media ratione.

Sit

Sit triangulum ABC isosceles, cuius uterque eorum, qui ad basim AB sunt, angulorum, duplus fit reliqui anguli BCA , & basis AB sit semidiameter circuli BDE . Dico circulum BDE secare crura CB , CA extremas, ac media ratione in F , & D . Quod circulus BDE crura CB , CA secet, est manifestum, nam secus angulus CBA esset rectus, vel obtusus, & latus AC minus esset latere AB , quæ sunt absurda. Secat igitur circulus BDE crura CB , CA . Dico,



& extrema, ac media ratione ea secare. Ducatur AF . Quoniam igitur angulus AFB æqualis est angulo FBA , ob æqualitatem laterum AF , AB , & eidem angulo FBA æqualis est angulus CAB ; erit angulus AFB , trianguli BFA , æqualis angulo CAB , trianguli BAC ; est autem angulus FBA communis: ergo reliquus angulus FAB reliquo BCA erit æqualis: æquiàngula sunt igitur triângula BAC , BFA . Rursus quia anguli CAB , AFB sunt inter se æquales, & angulus AFB æqualis est angulis FCA , FAC internis, & oppositis; erit angulus CAB eisdem angulis FCA , FAC æqualis; sed angulus FCA pars dimidia est anguli CAB ; igitur altera medietas erit angulus CAF ; æquales sunt igitur anguli FCA , CAF inter se; ideoque latus CF lateri FA erit æquale: sed eidem lateri FA æquale est latus BA ; igitur CF , BA inter se æqualia erunt. Quapropter, cum triângula CBA , FBA sint æquiàngula; erit CB ad BA , ut BA ad FB . hoc est CF ad FB . Itaque tota CB est ad majus segmentum CF , ut majus segmentum CF ad minus FB :

H

F B:

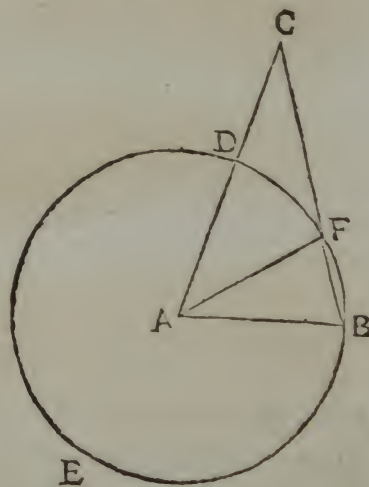
F B: Divisa est igitur C B extrema, ac media ratione in F. Quod etiam latus C A sectum sit extrema, ac media ratione in D, sic demonstramus. Latus C A æquale est lateri C B, & segmentum A D æquale semidiametro A B; hoc est segmento C F; erit propterea reliquum segmentum C D reliquo F B æquale. Quo circa latus C A sectum erit in D, ut C B in F; sed C B sectum est in F extrema, ac media ratione; igitur C A extrema, ac media ratione sectum erit in D. Quare circulus, cujus semidiameter est basis, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XIX. PROPOS. XLIV.

Si circulus, cujus semidiameter est basis trianguli isoscelis, secuerit ipsius trianguli crura extrema, ac media ratione: triagulum habebit utrumque eorū, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui.

B Asis A B, trianguli isoscelis B A C sit semidiameter circuli BDE, qui secet crura C B, C A extrema, ac media ratione in F, & D. Dico triangulum BAC habere utrumque eorum, qui ad basim B A sunt, angulorum, duplum reliqui B C A. Ducatur A F. Quoniam igitur angulus A F B, trianguli A B F, æqualis est angulo F B A; hoc est angulo C A B, trianguli B A C, & angulus F B A est communis; erit reliquus angulus B A F reliquo angulo B C A æqualis.

Et :

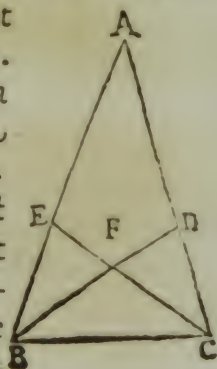


Et rursus quia latus CB sectum est extrema, ac media ratione in F : erit, ex coroll: propof. 40. hujus, majus segmentum CF æquale basi BA ; est autem eidem BA æqualis recta AF ; ergo FC, FA inter se æquales erunt. Idcirco angulus FAC angulo FCA erit æqualis: Atqui ostendimus angulum BAF eidem angulo FCA esse æqualem; igitur totus angulus BAC duplus erit anguli BCA ; ideoque ejusdem anguli BCA duplus erit angulus $CB A$, ut pote qui æqualis angulo CAB . Itaque si circulus, cujus semidiameter est basis trianguli isosceles, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. XX. PROPOS. XLV.

Si triangulum isosceles habuerit utrumque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui, & uterque bifariam sectus fuerit: rectæ lineæ, quæ angulos secant productæ ad opposita latera extrema, ac media ratione mutuo se se interfecabunt.

Triangulum isosceles ABC habeat utrumque eorum, qui ad basim BC sunt, angulorum, duplum reliqui BAC , & rectæ BD, CE secant æquales angulos ABC, ACB bifariam. Dico, rectas BD, CE ad opposita latera AC, AB productas extrema, ac media ratione se se mutuo in F interfecare. Quoniam igitur latus AC sectum est extrema, ac media ratione in D ; erit majus segmentum AD , ex coroll: propof. 40. hujus, æquale basi BC ; quare erit AD ad DC , ut BC ad idem CD , sed ut BC ad CD , ita est etiam BF ad FD ; ergo ut AD ad DC , ita erit BF ad FD ; est autem

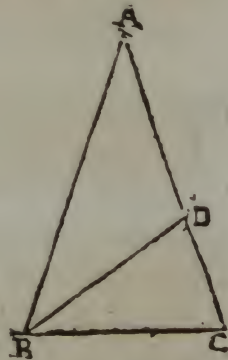


tē A C extrema, ac media ratione sec̃ta in D; igitur B D extrema, ac media ratione sec̃ta erit in F. Non sec̃tus ostendemus C E extrema, ac media ratione sec̃tam esse in F; ergo igitur rect̃æ B D, C E extrema, ac media ratione in F se mutuo interfecabunt. Si igitur triangulum isosceles habuerit utrumq; eorum, qui ad basim sunt, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. XXI. PROPOS. XLVI.

Si latus trianguli isoscelis, cujus uterque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplus est reliqui, & basis ejusdem componantur; tota recta linea extrema, ac media ratione secabitur.

S It triangulū A B C isosceles, cujus uterq; eorum, qui ad basim B C sunt, angulorum, duplus sit reliqui B A C. Dico, si unum æqualium laterum, A B, & basis B C componantur, totam rectam lineam extrema, ac media ratione secari. Dividatur angulus A B C bifariam per rectam B D productam in puncto D lateris A C. Quoniam igitur recta B D secat angulum A B C bifariam; erit, ut segmentum A D ad segmentum D C, ita latus A B ad latus B C; Sed A C, per propos. 40. hujus, sec̃ta est extrema, ac media ratione in D; ergo igitur si latus A B, & basis B C componantur, tota recta linea extrema, ac media ratione sec̃ta erit in puncto B. Itaque, si latus trianguli isoscelis cujus uterque eorum, qui ad basim sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

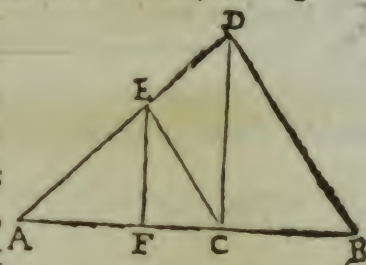


THEOR.

THEOR. XXII. PROPOS. XLVII.

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit;
 rectangulum contentum sub majori segmento,
 & sub excessu, quo majus segmentum minus su-
 perat æquale erit ei, quod à minori segmento de-
 scribitur, quadrato.

S It recta AB extrema, ac media ratione secta in C .
 Dico rectangulum comprehensum à majori segmē-
 to AC , & ab excessu, quo majus
 segmentum AC superat minus
 CB æquale esse quadrato mi-
 noris segmenti CB . Ad rectam
 AB erigatur a puncto sectionis
 quævis perpendicularis CD ,
 junganturque AD , DB , &
 CE occurrens AD in E parallela sit rectæ BD , demū
 a puncto E ducatur EF parallela ipsi DC . Quoniam
 igitur in triangulo ABD recta CE parallela est basi
 BD ; erunt latera AB , AD proportionaliter secta in C ,
 & E . Et rursus quia EF parallela est basi DC , trianguli
 ACD ; erunt latera AD , AC proportionaliter secta
 in E , & F ; sed AD divisa est in E , ut AB in C ; igitur
 AC divisa erit in F , ut eadem AB in C ; atqui AB ex-
 trema, ac media ratione divisa est in C ; igitur AC ex-
 trema, ac media ratione secta erit in F ; quare erit AC
 ad AF , ut AF ad FC ; sed ut AF ad FC , ita est AC ,
 ad CB ; ergo erit AC ad AF , ut AC ad CB ; eadem
 igitur recta AC ad duas AF , CB eādem rationem ha-
 bet; ideoque AF , CB inter se æquales erunt; est autē FC
 excessus, quo AC superat AF ; igitur FC excessus erit,
 quo majus segmentum AC superat minus CB . Cum
 autem



autem, ut modo demonstravimus, sit AC ad CB , ut A F ; hoc est CB ad FC , erit rectangulum contentum sub extremis; hoc est sub majori segmento AC , & sub excessu FC , quo majus segmentum AC minus superat CB æquale ei, quod a media; hoc est a minori segmento CB describitur, quadrato. Ergo si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

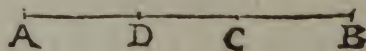
COROLLARIUM.

S Equitur ex hujus theorematis demonstratione; si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, & à majori segmento minus auferatur segmentum; majus segmentum extrema, ac media ratione quoque secari.

THEOR. XXIII. PROPOS. XLVIII.

Si recta linea secta fuerit in partes inæquales, & rectangulum contentum sub majori segmento, & sub excessu, quo majus segmentum minus superat æquale fuerit quadrato minoris segmenti; recta linea extrema, ac media ratione secta erit.

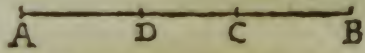
R ecta AB sit secta in partes inæquales in C , & rectangulum contentum sub majori segmento AC , & sub excessu DC , quo majus segmentum AC minus segmentum CB superat æquale sit quadrato minoris segmenti CB . Dico rectam AB extrema, ac media ratione sectam esse in C . Quoniam igitur AC superat CB excessu DC , & eodem excessu DC superat rectam AD ; erunt AD , CB



D, CB æquales inter se; quare cum sit AC ad CB, ut CB ad DC, (rectangulum enim sub AC, & sub DC quadrato ex CB est æquale) & AD, CB sunt inter se æquales, ex demonstratis; erit tota AC ad majus segmentum AD, ut majus segmentum AD, ad minus DC; extrema igitur, ac media ratione secta est AC in D. Est autem AC ad CB, ut CB, hoc est AD ad DC; ergo AB similiter secta erit in C, ac secta est AC in D; atqui AC extrema, ac media ratione secta est in D; igitur AB extrema, ac media ratione quoque secta erit in C. Quare si recta linea secta fuerit in partes inæquales, &c. Quod probandum erat.

THEOR. XXIV. PROPOS. XLIX.

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit: rectangulum contentum sub tota, & sub excessu, quo majus segmentum minus superat æquale erit ei, quod sub majori, & minori segmento continetur, rectangulo.

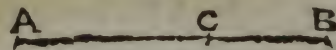
SIt recta AB extrema, ac media ratione secta in C, & excessus, quo majus segmentum AC superat minus CB sit DC. Dico rectangulū contentum sub tota AB, & sub  excessu DC, quo majus segmētū AC superat minus CB æquale esse ei, quod sub majori segmēto AC, & sub minori CB cōtinetur, rectangulo. Quoniā igitur, ex propof. 47. hujus, rectāgulū ACD æquale est quadrato CB; erit AC ad CB, ut CB ad DC; sed ut AC ad CB, ita est tota AB ad majus segmentum AC; (nam AB extrema, ac media ratione secta est in C) igitur erit ut tota AB ad majus segmentum AC, ita minus segmentum CB ad
ex-

excessum DC , quo majus segmentum AC minus CB superat; ac propterea rectangulum contentum sub extremis AB , DC æquale erit ei, quod sub mediis AC , CB continetur, rectangulo. Ergo si recta linea secta fuerit extrema, ac media ratione; rectangulum contentum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXV. PROPOS. I.

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit; quod subtota, & sub majori segmento continetur rectangulum majus erit rectangulo contento sub tota, & sub minori segmento, rectangulo sub ambobus segmentis comprehenso.

SIt recta AB extrema, ac media ratione secta in C . Dico rectangulum contentum sub tota AB , & sub majori segmento AC majus esse rectangulo contento sub tota AB , & sub minori segmento CB , rectangulo contento sub ambobus segmentis AC , CB . Quoniam igitur rectangulum BAC æquale est quadrato AC , & rectangulo ACB , & est quadratū majoris segmenti AC æquale rectangulo ABC ; (cum AB extrema, ac media ratione sit secta in C) erit rectangulum BAC æquale rectangulis ABC , ACB ; hoc est rectangulum BAC majus erit rectangulo ABC , rectangulo ACB . Si igitur recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

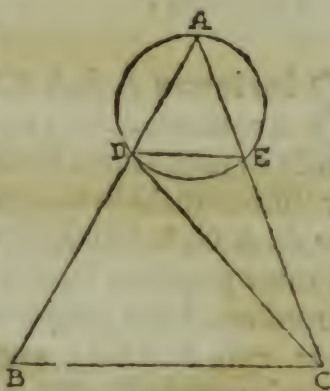


THEOR.

THEOR. XXVI. PROPOS. LI.

Si duo latera trianguli isoscelis, vel scaleni minimum angulum continentia proportionaliter secta fuerint, & quæ ab uno sectionum puncto ad angulum oppositum ducitur recta linea fecerit cum basi angulum angulo verticali æqualem; quadratum hujus lineæ æquale erit rectangulo contento, sub reliquo latere secto, & sub segmento ipsius inter punctum sectionis, & basim interposito.

Sint latera AB, AC , trianguli ABC , cōtinentia minimū angulum BAC , proportionaliter secta in $D, & E$, & recta DC , ab uno sectionum puncto D ad angulum oppositū ACB ducta, faciat cū basi BC angulum DCB æqualem angulo verticali BAC . Dico, quadratum DC æquale esse rectangulo contento sub reliquo latere AC , & sub ipsius segmento CE inter punctum E , & basim BC interposito; hoc est rectangulo ACE . Ducatur DE , & circulus ADE circa triangulum EAD describatur. Quoniam igitur latera AB, AC proportionaliter secta sunt in $D, & E$; erit DE parallela basi BC ; adeoq; angulus EDC angulo DCB erit æqualis; sed eidem angulo DCB æqualis est angulus DAE ; ergo anguli EDC, DAE inter se æquales erunt: ac propterea CD tangens erit circulum DAE : quare quadratum DC æquale erit rectangulo ACE . Si igitur duo latera, trianguli

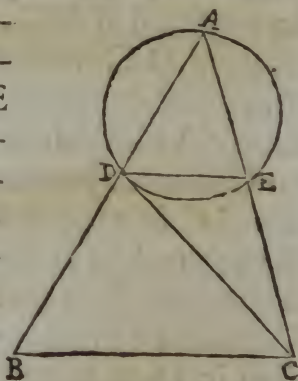


isofcelis, vel scaleni minimum angulum continentia secta fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXVII. PROPOS. LII.

Si duo latera trianguli isofcelis, vel scaleni, quæ sunt circa minimum angulum, proportionaliter secta fuerint, & quadratum ejus, quæ ab uno sectionum puncto ad angulum oppositum ducitur, æquale fuerit rectangulo contento sub reliquo latere secto, & sub segmento ipsius, quod inter punctum sectionis, & basim interponitur: recta linea adjuncta faciet cum basi angulum angulo verticali æqualem.

Sint latera AB, AC , trianguli ABC , quæ minimum angulum BAC continent proportionaliter secta in D , & E , jungaturq; DC , cujus quadratum æquale sit rectangulo contento sub AC , & sub ipsius segmento EC inter punctum E , & basim BC interposito. Dico, adjunctam DC facere cum basi BC angulum DCB æqualem angulo verticali BAC . Ducta DE , describatur circa triangulum DAE circulus EDA . Quoniam igitur AB, AC proportionaliter secta sunt in D , & E : erit DE parallela basi BC ; ideoq; angulus BCD angulo CDE erit æqualis. Et quia quadratum CD æquale est rectangulo ACE ; erit recta CD tangens circulum EDA : quare angulus DAE æqualis erit angulo CDE ; sed eidem angulo CDE æqualem esse

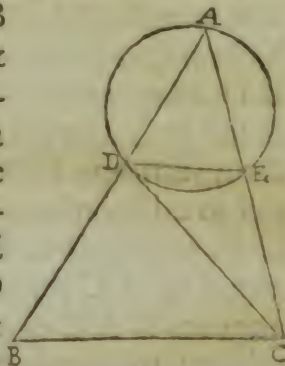


esse ostendimus angulum $B C D$; ergo anguli $B C D$, $D A E$ inter se erunt æquales. Itaque si duo latera, trianguli isoscelis, vel scaleni proportionaliter secta fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXVIII. PROPOS. LIII.

Si duo latera, trianguli isoscelis, vel scaleni, quæ minimum angulum continent secta fuerint, & quæ ab uno sectionum puncto ad angulum oppositum ducitur recta linea, fecerit cum basi angulum angulo verticali æqualem, & insuper ipsius quadratum æquale fuerit rectangulo contento sub reliquo latere secto, & sub segmento ipsius inter punctum sectionis, & basim interposito: latera proportionaliter secta erunt.

Latera $A B$, $A C$, trianguli $A B C$ comprehendunt minimum angulum $B A C$ sint secta in D , & E , & $D C$ faciat cū basi $B C$ angulū $D C B$ æqualem angulo verticali $B A C$, & insuper quadratum ipsius $D C$ æquale sit rectangulo $A C E$. Dico, latera $A B$, $A C$ proportionaliter secta esse in D , & E . Ducatur $D E$, & circa triangulum $A D E$ describatur circulus $E D A$. Quoniam igitur quadratum $D C$ æquale est rectangulo $A C E$; erit $D C$ tangens circulum $E D A$; ac proinde angulus $C D E$ angulo $D A E$ erit æqualis; sed eidem angulo $D A E$ æqualis est angulus $D C B$; igitur anguli $D C B$, $C D E$ æquales inter se erunt: itaque parallelæ sunt $B C$, $D E$ inter se; quapropter $D E$ secabit

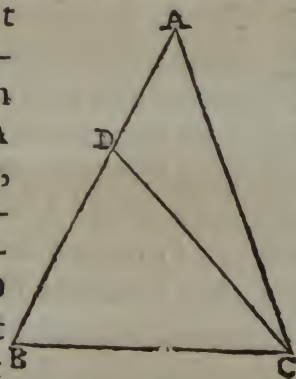


latera AB, AC proportionaliter in D, E . Quare, si duo latera, trianguli isoscelis, vel scaleni secta fuerint, & quæ, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. XXIX. PROPOS. LIV.

In triangulo isoscele, vel scaleno, si unum eorum laterum, quæ sunt circa minimum angulum sectum fuerit, & recta linea ducta à puncto sectionis ad angulum oppositum fecerit cum basi angulum, angulo verticali æqualem: quadratum basis æquale erit rectangulo contento sub latere secto, & sub ipsius segmento inter punctum sectionis, & basim interposito.

IN triangulo ABC unum laterum AB, AC , quæ circa minimum angulum BAC sunt; hoc est latus AB sit sectum in D , & recta DC faciat cum basi BC angulum DCB æqualem angulo BAC . Dico quadratum basis BC æquale esse rectangulo ABD , contento sub latere secto AB , & sub ipsius segmento DB , inter punctum sectionis D , & basim CB interposito. Quoniam igitur angulus DCB , trianguli BCD , æqualis est angulo BAC , trianguli ACB , & angulus DBC communis; erit reliquus angulus BDC reliquo angulo ACB æqualis: æquiangula sunt igitur triangula ABC, DCB ; idcirco latera circa æquales angulos proportionalia erunt; hoc est AB ad BC , ut CB ad BD ; sunt igitur tres rectæ lineæ AB, BC, BD continuè

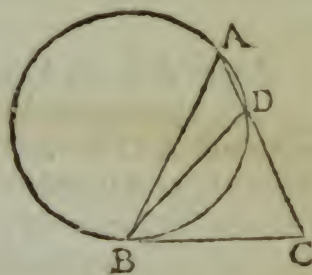


tinuè proportionales; quare quadratum ex media; hoc est ex basi BC æquale erit rectangulo ABD sub extremis; hoc est sub latere secto AB , & ipsius segmento DB , inter punctum sectionis D , & basim BC interposito. In triangulo igitur isoscele, vel scaleno, si unum eorum laterum, quæ sunt circa minimum angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXX. PROPOS. LV.

In triangulo isoscele, vel scaleno, si unum eorum laterum, quæ sunt circa minimum angulum sectum fuerit, ita ut rectangulum contentum sub ipso, & sub ipsius segmento basi adjacentæ æquale sit basii quadrato; recta linea à puncto sectionis ad angulum oppositum ducta faciet cum basi angulum, angulo verticali æqualem.

IN triângulo ABC unum laterum AB , BC , quæ circa minimũ angulũ BAC sunt; hoc est latus AC sit sectũ in D , ita ut rectangulum ACD cõtentum sub latere secto AC , & sub ipsius segmento DC , basi BC adjacentæ æquale sit quadrato basii BC . Dico, rectam DB continere cum basi CB angulũ DBC angulo verticali BAC æqualem. Quoniã igitur rectangulum ACD æquale est quadrato BC ; erit AC ad CB , ut CB ad CD ; quare cum triângula ABC , BCD habeãt angulũ DCB cõmunẽ, & latera circa hunc angulũ proportionalia; hoc est AC ad CB , ut CB ad CD ; erunt



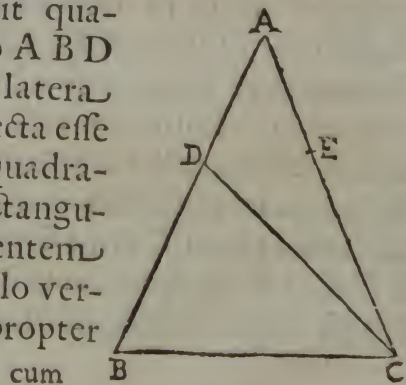
erunt ipsa æquiāgula; igitur angulus $C B D$ angulo verticali $B A C$ æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

Aliter. Describatur circa triangulum $A B D$ circulus $B D A$. Quoniā igitur rectangulū $A C D$ æquale est quadrato $C B$; erit $C B$ tangens circulum $B D A$; idcirco angulus $C B D$ angulo verticali $B A C$ erit æqualis. In triangulo igitur isoscele, vel scaleno, si unum eorum laterum, quæ sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXI. PROPOS. LVI.

In triangulo isoscele, vel scaleno, si latera, quæ sunt circa minimum angulum secta fuerint, ita ut rectangulum contentum sub uno ipsorum, & sub segmento ejusdem basi adjacentæ æquale fuerit quadrato rectæ lineæ, quæ à puncto sectionis alterius lateris ad angulum oppositum ducitur, rectangulum vero sub reliquo latere, & sub ipsius segmento basi adjacentæ æquale fuerit basis quadrato; latera proportionaliter secta erunt.

L Atera $A B$, $A C$ continentia minimum angulum $B A C$, trianguli $A B C$, sint secta in D , & E , ita ut rectangulum $A C E$ æquale sit quadrato $D C$, rectangulum vero $A B D$ quadrato $B C$ æquale. Dico latera $A B$, $A C$ proportionaliter secta esse in D , & E . Quoniam igitur quadratum basis $B C$ æquale est rectangulo $A B D$; erit, per præcedentem propos: angulus $D C B$ angulo verticali $B A C$ æqualis; quapropter

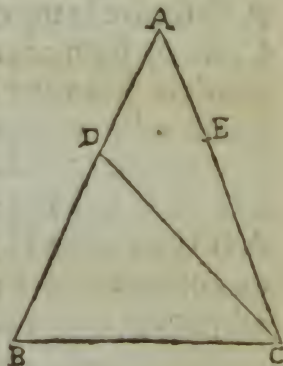


cū angulus DCB æqualis sit angulo verticali BAC , & quadratum ex DC æquale rectangulo ACE , erunt latera AB, AC , trianguli ABC , ex propof. 53. hujus, proportionaliter ſecta in D, E . Itaque in triângulo iſoſcele, vel ſcaleno, ſi latera, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXII. PROPOS. LVII.

Si duo latera, quæ ſunt circa minimum angulum trianguli iſoſcelis, vel ſcaleni proportionaliter ſecta fuerint, & quæ ab uno ſectionum puncto ad angulum oppoſitum ducitur recta linea fecerit cū baſi angulum angulo verticali æqualem: quadratum baſis, & quadratum rectæ lineæ, quæ ab uno ſectionum puncto ad angulum oppoſitum eſt ducta eandem proportionem inter ſe habebunt, ac rectangula ſub lateribus ſectis, & ſub ſegmentis eorundem baſi adjacentibus contenta.

Latera AB, AC circa minimum angulum BAC ſint proportionaliter ſecta in D, E , & recta DC ab uno ſectionū puncto D ad angulū oppoſitum ACB ducta faciat cum baſi BC angulum DCB æqualem angulo verticali BAC . Dico, quadratum BC eandem proportionem habere ad quadratum DC , ac habet rectangulum ABD ad rectangulum ACE . Quoniā igitur, per propof. 54. hujus, quadratū BC æquale eſt rectângulo ABD , & quadratum DC , per propof. 52. hujus, æquale eſt rectângulo ACE , erit quadratum



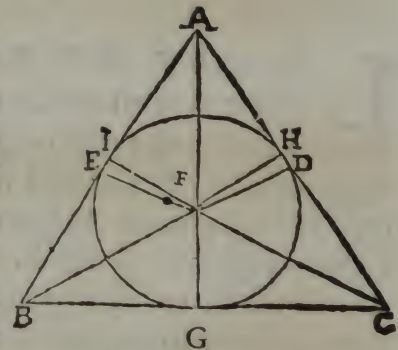
dratum BC ad rectangulum ABD , ut quadratum DC ad rectangulum ACE ; & permutando quadratum BC ad quadratum DC , ut rectangulum ABD , ad rectangulum ACE . Si igitur latera, quæ sunt circa minimum angulum trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXIII. PROPOS. LVIII.

Si duo anguli cujuscunq; trianguli bifariam secti fuerint, secantes autem angulos rectæ lineæ, se mutuo secantes, ad latera opposita fuerint productæ; linea recta à reliquo angulo ad latus oppositum ducta, & per reliquarum intersectionem transiens, secabit ipsum in eadem ratione, ac reliqua latera inter se habent.

A Nguli ABC , ACB , trianguli ABC , sint bifariam divisi à rectis BD , CE , se mutuo secantes in F , & à reliquo angulo BAC ad latus oppositum BC sit ducta AG transiens per punctum intersectionis F . Dico, rectam AG secare latus oppositum BC , ita ut segmenta BG , GC eandem habeant rationem, quam reliqua latera AB , AC ; hoc est esse ut BA ad AC , ita BG ad GC . Intra triangulum ABC circulus HIG describatur, cujus centrum erit F , ex constructione Prop. 4. Quarti elemen: & à centro F , ad puncta contactus ducantur rectæ FH , FI . Quoniam igitur latus AI , trianguli AIF , æquale est lateri AH , trianguli AHF , & latus IF lateri FH , basis vero AF

com-

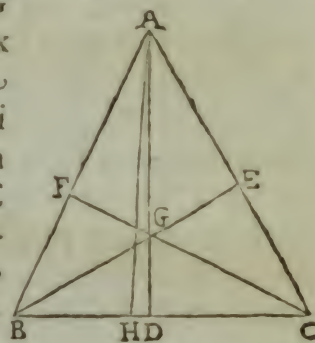


communis; erit angulus $I A F$ angulo $F A H$ æqualis; divisus est igitur bifariam angulus $B A C$ à recta $A G$: quare recta $A G$ secabit basim $B C$, ita ut segmenta $B G$, $G C$ eandem habeant rationem inter se, ac reliqua latera $B A$, $A C$; hoc est erit ut $A B$ ad $A C$, ita $B G$ ad $G C$. Si igitur duo anguli cujuscunque trianguli bifariam secti fuerint, secantes autem, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXIV. PROPOS. LIX.

Si tres anguli cujuscunque trianguli bifariam secti fuerint; secantes rectæ lineæ ad latera opposita productæ omnes in uno, eodẽque puncto sese intersecabunt.

Sint anguli $A B C$, $A C B$, $B A C$, trianguli $A B C$, bifariam secti à rectis $A D$, $B E$, $C F$. Dico secantes $A D$, $B E$, $C F$ in eodem puncto G se interfecare. Si autem aliqua ex ipsis, $A D$ non transit per idem punctum G , ducatur $A H$, si fieri potest, quæ transeat per punctum G . Quoniam igitur rectæ $E B$, $F C$ secant angulos $A B C$, $A C B$ bifariam; recta $A H$, à reliquo angulo $B A C$ ad latus oppositum $B C$ ducta, & transiens per reliquarum intersectionem G , secabit, per præcedentem propos., latus $B C$ in eadem ratione, ac reliqua latera $B A$, $A C$; ac propterea recta $A H$ secabit angulum $B A C$ bifariam; sed eundem angulum $B A C$ bifariam secat recta $A D$; igitur angulus $B A C$ sectus est bifariam tam à recta $H A$, quam à recta $D A$. Quod est absurdum. Non igitur $A H$, sed



K

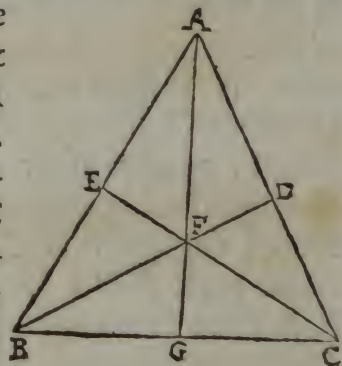
AD

A D transiit per punctum sectionis G; adeoque omnes tres rectæ lineæ A D, B E, C F in eodem punctum G se interfecabunt. Si tres igitur anguli cujuscunque trianguli bifariam secti fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXV. PROPOS. LX.

Si duo latera cujuscunque trianguli secta fuerint, ita ut singulorum segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli latera, & à punctis sectionum ad angulos oppositos duæ rectæ ductæ fuerint; recta linea à reliquo angulo ad latus oppositum ducta, & per sectionis punctum reliquarum transiens, eundem angulum bifariam secabit.

Sint latera A B, A C, trianguli A B C, divisa in D, & E, ita ut sit A D ad D C, ut A B ad B C, & A E ad E B, ut A C ad C B, & rectæ D B, E C à punctis sectionum D, & E ad angulos oppositos A B C, A C B ductæ, se mutuo secant in F. Dico rectam A G, à reliquo angulo B A C ad latus oppositum B C ductam, & per punctum intersectionis F transeuntem, dividere angulum B A C bifariam. Quoniã igitur latus A B sectum est in E in eadem ratione, ac reliqua latera A C, C B; erit angulus A C B bifariam divisus à recta E C; eadem ratione recta D B bifariam dividet angulum A B C; quapropter recta A G à reliquo angulo B A C ad latus oppositum B C ducta, & per punctum sectionis F transiens, dividet latus B C, per propos. 58. hujus, in eadem ratione, ac reliqua late-

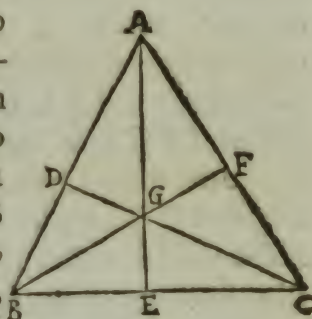


latera BA , AC ; Adeoq; GA angulum BAC bifariam
secabit. Quare si duo latera cujuscunque trianguli secta
fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXVI. PROPOS. LXI.

Si latera cujuscunque trianguli secta fuerint, ita ut
singulorum segmenta eadem habeant rationem,
quam reliqua duo trianguli latera; rectæ lineæ à
punctis sectionũ ad angulos oppositos ductæ in
uno, eodemque puncto mutuo sese interfecabunt.

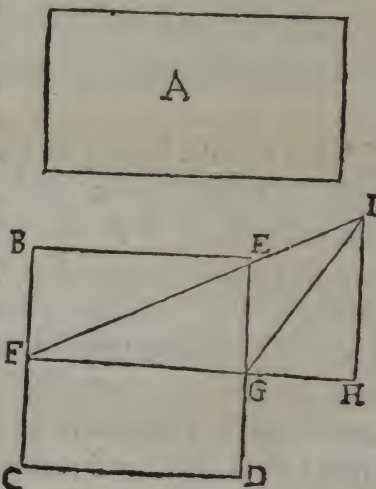
Sint divisa latera AB , BC , CA , trianguli ABC , in
 D , E , F , ita ut sit AD ad DB , ut AC ad CB , &
 BE ad EC , ut BA ad AC , & deni-
que CF ad FA , ut CB ad BA . Dico
rectas DC , EA , FB , à punctis sectio-
num ad angulos oppositos ductas, in
uno, eodemque puncto G se mutuo
intersecare. Quoniam igitur singula
latera AB , BC , CA , trianguli ABC ,
sunt divisa, ita ut singulorum
segmenta eandem habeant rationem,
quam reliqua duo ipsius trianguli
latera; erunt anguli ABC , BCA , CAB divisi bifariam
à rectis FB , DC , EA ; adeoq; per propo: 59. hujus, re-
ctæ FB , DC , EA in uno, eodemque puncto G se mutuo
intersecabunt. Si igitur latera cujuscunque trianguli
secta fuerint, ita ut &c. Quod erat demonstrandum.



PROBL. XXVI. PROPOS. LXII.

Triangulum constituere, ita ut quadratum unius lateris majus sit quadratis reliquorum laterum dato rectilineo.

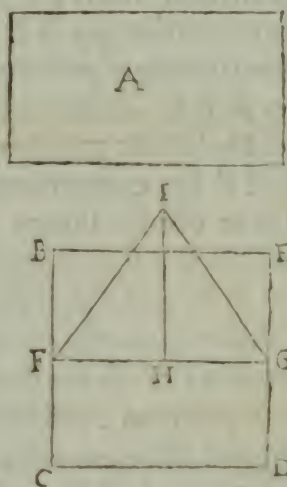
Sit datum rectilineum A. Oportet igitur constituere triangulum, ita ut quadratum unius lateris ipsius majus sit quadratis reliquorum laterum rectilineo A. Quadratum B C D E sit rectilineo A æquale, & diviso latere B C bifariam in F, agatur F G parallela B E, quæ producat in H, ita ut G H æqualis sit G E, deinde erecta à puncto H quavis perpendiculari H I, adjungantur G I, F I. Dico triangulum I F G esse quod constituendum erat. Quoniam igitur angulus F G I major est angulo recto G H I; erit angulus F G I obtusus; quare in triangulo obtusangulo I F G quadratum lateris I F, obtusum angulum F G I subtendentis, majus erit quadratis reliquorum laterum F G, G I duplo rectanguli F G H, est autem G E æqualis rectæ G H; igitur quadratum F I majus erit quadratis F G, G I duplo rectanguli F E; hoc est quadrato B D; atqui quadrato B D æquale est rectilineum A; igitur quadratum F I majus erit quadratis F G, G I rectilineo dato A. Triangulum igitur constitutum est, ita ut quadratum unius lateris, &c. Quod erat faciendum.



PROBL.

Triangulum constituere, ita ut quadratum unius lateris minus sit quadratis reliquorum laterum dato rectilineo.

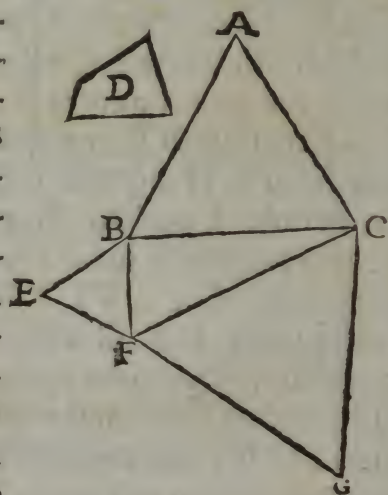
Oportet constituere triangulum, ita ut quadratum unius lateris minus sit quadratis reliquorum laterum rectilineo A. Fiat quadratum B C D E rectilineo A æquale, & diviso latere B C bifariam in F, ducatur à puncto F recta F G parallela B E, ex qua abscindatur G H æqualis rectæ G E, deinde à puncto H erecta quavis perpendiculari H I, adjungantur G I, F I. Dico, triangulum I F G esse quod queritur. Quoniam igitur angulus rectus F H I major est angulo I G F; erit angulus I G F acutus; ideo in triangulo I F G quadratum lateris F I, acutum angulum I G F subtendentis, minus erit quadratis reliquorum laterum F G, G I duplo rectanguli F G H; est autem H G æqualis rectæ G E; igitur quadratum F I minus erit quadratis F G, G I duplo rectanguli F E; hoc est quadrato B D, quod cum sit rectilineo A æquale: erit quadratum lateris F I, trianguli I F G, minus quadratis reliquorum laterum F G, G I rectilineo dato A. Constitutum est igitur triangulum, ita ut quadratum unius lateris minus, &c. Quod efficiendum erat.



PROBL.

Dato rectilineo rectilineum simile, similiterque positum constituere, quod excedat datum altero dato rectilineo.

Rectilineo ABC constituendum sit rectilineum simile, similiterque positum, & excedens idem ABC rectilineo dato D . Constituatur rectilineum BEF simile, similiterque positum rectilineo ABC , & æquale rectilineo D , deinde rectilinea ABC , BEF ita connectantur inter se, ut eorum latera homologa CB , BF faciāt angulū rectū CBF , quē subtrēdat recta EC , super qua constituatur rectilineum CEG simile, similiterque positum rectilineo ABC . Quod dico excedere idem rectilineum ABC rectilineo dato D . Quoniam igitur rectilineum CEG æquale est rectilineis ABC , BEF , & rectilineum BEF æquale est rectilineo D ; erit rectilineum CEG æquale rectilineis ABC , & D ; hoc est rectilineum CEG excedet rectilineū ABC simile, similiterque positum, dato rectilineo D . Dato igitur rectilineo rectilineum simile, similiterque positum constitutum est, &c. Quod faciendum erat.



PROBL.

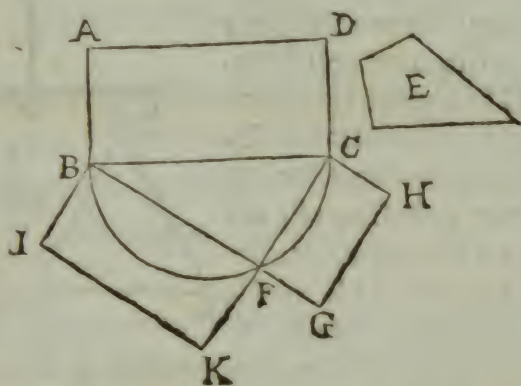
PROBL. XXIX. PROPOS. LXV.

79

Dato rectilineo rectilineum simile, similiterque positum constituere, deficiens ab eo altero rectilineo dato.

Constituendum est rectilineum simile, similiterque positum rectilineo $A B C D$, & deficiens ab eo altero rectilineo

dato E . Super latere $B C$ describatur semicirculus $B F C$, & constituto rectilineo $C F G H$ simili, similiterque posito rectilineo $A B C D$, & æquali



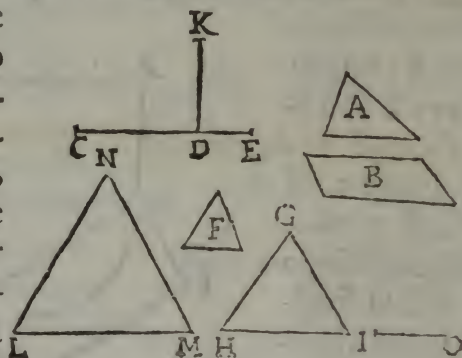
rectilineo D , connectantur rectilinea $A B C D$, $C F G H$, itaut latus $C F$, homologum lateri $B C$, accommodatum sit in semicirculo $B F C$, adjungaturque $B F$, super qua constituatur rectilineum $B I K F$ simile, similiterque positum rectilineo $A B C D$. Quod dico deficere ab ipso $A B C D$ rectilineo E . Quoniam igitur angulus $B F C$, trianguli $B C F$, rectus est; erit rectilineum $A B C D$ æquale rectilineis $B I K F$, $C F G H$; igitur ablato rectilineo $C F G H$; deficiet rectilineum $B I K F$, quod simile, similiterque positum est rectilineo $A B C D$, ab eodem $A B C D$ rectilineo $C F G H$; hoc est rectilineo E . Dato igitur rectilineo rectilineum simile, similiterque positum constitutum est, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL.

PROBL. XXX. PROPOS. LXVI.

Rectilineum constituere, quod habeat ad duo data rectilinea datam proportionem, & simile sit, similiterque positum cuivis dato rectilineo.

O Porteat constituere rectilineum, quod habeat ad rectilinea A, B proportionem rectæ CD ad DE, & simile sit, similiterque positum cuivis rectilineo F. Constituatur rectilineum GHI, quod sit æquale duobus rectilineis A, B, & simile similiterque positum rectilineo F, per scol: ad fin: sex: elem.; deinde inventa DK media proportionali inter C D, DE, inveniatur, per propof. 2. lib. 7. colle: Pappi, quarta LM, quæ sit ad tertiam HI, ut prima CD ad secundam DK, & super recta LM constituatur rectilineum LMN simile, similiterque positum rectilineo F. Quod, dico habere ad duo rectilinea A, B datam proportionem rectæ CD ad DE. Tribus rectis lineis DK, DE, HI inveniatur quarta proportionalis IO; hoc est sit ut DK ad DE, ita HI ad IO. Quoniam igitur est ut CD ad DK, ita LM ad HI, & ut DK ad DE; ita HI ad IO: erit ex æqualitate ut CD ad DE, ita LM ad IO. Cum autem sit ut CD ad DK, ita LM ad HI, & ut eadem CD ad DK, ita DK ad DE; (nam CD, DK, DE continuè sunt proportionales) erit ut DK ad DE; ita LM ad HI; est autem DK ad DE, ut HI ad IO; ergo erit LM ad HI, ut HI ad IO. Continuè sunt igitur propor-

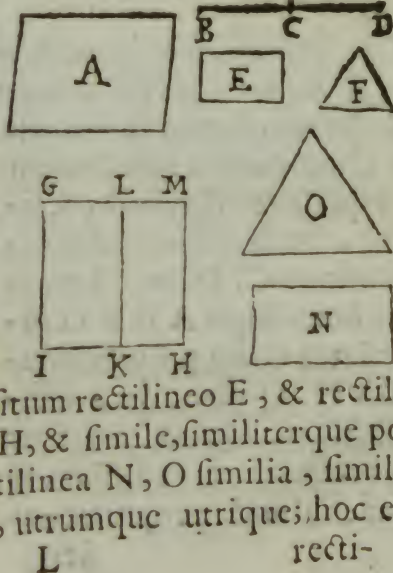


tionales LM, HI, IO ; quare erit rectilineum NLM super prima LM ad rectilineum GHI super secunda HI constitutum, ut prima LM ad tertiam IO : sed ut LM ad IO , ita est (ut modo demonstravimus) CD ad DE ; ergo igitur erit rectilineum NLM , quod est simile, similiterque positum rectilineo F , ad rectilineum GHI ; hoc est ad duo rectilinea A, B , ut CD ad DE . Constitutum est igitur rectilineum habens ad duo data rectilinea, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. XXXI. PROPOS. LXVII.

Dato rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ habeant inter se datam proportionem, & sint similia, similiterque posita duobus quibuscumque datis rectilineis, utrumque utrique.

Rectilineo A oportet constituere duo æqualia rectilinea, quæ habeant inter se proportionem rectæ BC ad CD , & sint similia, similiterque posita rectilineis E, F , utrumque utrique. Fiat quadratum GH rectilineo A æquale, & secto latere $I H$ in K , ita ut sit IK ad KH , ut BC ad CD , ducatur KL parallela HM . Deinde constituatur rectilineum N æquale rectilineo IL , & simile, similiterque positum rectilineo E , & rectilineum O æquale rectilineo LH , & simile, similiterque positum rectilineo F . Dico rectilinea N, O similia, similiterque posita rectilineis E, F , utrumque utrique; hoc est recti-

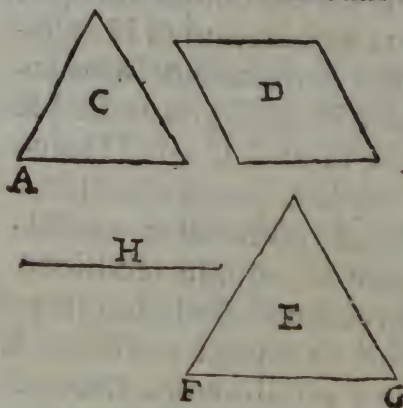


rectilineum N rectilineo E, rectilineum vero O rectilineo F, æqualia esse simul rectilineo dato A, & habere inter se proportionē rectæ B C ad C D. Quoniam igitur rectilinea N, O æqualia sunt rectilineis I L, L H; hoc est quadrato G H, & eidem quadrato G H æquale est rectilineum A; erunt rectilinea N, O æqualia rectilineo A. Cum autem sit rectilineum N æquale rectilineo G K, & rectilineum O rectilineo L H æquale; erit ut rectilineum N ad rectilineum G K, ita rectilineum O ad rectilineum L H; adeoque permutando erit, ut G K ad L H, ita N ad O; sed ut G K ad L H, ita est recta I K ad K H; hoc est B C ad C D; ergo erit ut B C ad C D, ita rectilineum N ad rectilineum O. Dato igitur rectilineo constituta sunt duo rectilinea, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL. XXXII. PROPOS. LXVIII.

Rectam lineam invenire, ad quam ita se habeat latus dati rectilinei, ut est idem rectilineum ad alterum rectilineum datum.

Oportet invenire rectam lineam, ad quam ita se habeat latus A B rectilinei C, ut est rectilineum C ad alterum datum rectilineum D. Constituatur rectilineum E æquale rectilineo D, & simile, similiterque positum, rectilineo C. Deinde lateribus homologis A B, F G inveniatur tertia proportionalis H. Quam, dico esse quæsitam. Quoniam igitur tres rectæ lineæ A B, F G, H sunt continuè proportionales;

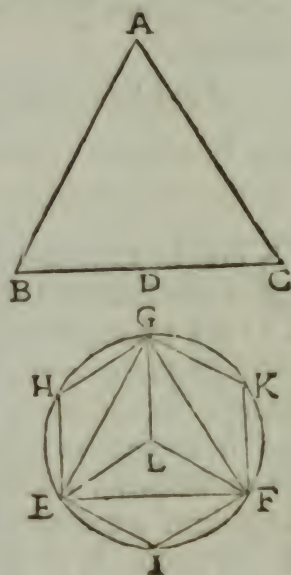


les; erit ut rectilineum C super prima A B ad rectilineum E super secunda F G; hoc est ad rectilineum D, ita prima A B ad tertiam H. Ergo rectam lineam invenimus, ad quam ita se habet, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. XXXIII. PROPOS. LXIX.

Dato triangulo æquilatero hexagonum æquilaterum, & æquiangulum æquale constituere.

Triangulo æquilatero A B C hexagonum æquilaterum, & æquiangulum æquale est constituendum. Dividatur B C bifariam in D, inveniaturque E F media proportionalis inter B C, & C D, super qua triangulum æquilaterum E F G constituatur, & in circulo H I K, circa triangulum E F G descripto, inscribatur hexagonum G H E I F K æquilaterum, & æquiangulum. Quod, dico triangulo æquilatero A B C esse æquale. Ab angulis G, E, F ad centrum L ducatur G L, E L, F L. Quoniam igitur latera H G, H E, trianguli H E G, æqualia sunt lateribus L G, L E, trianguli L E G, utrumqueque, & basis G E communis; erit triangulum H E G triangulo L E G æquale. Eademque ratione, triangula E I F, F K G æqualia erunt triangulis L E F, L F G; adeoque hexagonum G H E I F K duplum erit trianguli G E F. Cum autem B C, E F, B D sint continuè proportionales; erit triangulum B C A super prima B C cō-



L 2

stitu-

stitutū, ad triangulum EFG super secunda EF constitutum, ut prima BC ad tertiam BD ; atqui BC dupla est ipsius BD ; igitur triangulum ABC duplum erit triāguli EFG ; sed ejusdem triāguli EFG duplum esse demonstravimus hexagonum $GHEIFK$; igitur hexagonum $GHEIFK$ æquilaterum, & æquiangulum, & triangulum æquilaterum ABC inter se erunt æqualia. Dato igitur triangulo æquilatero factum est, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

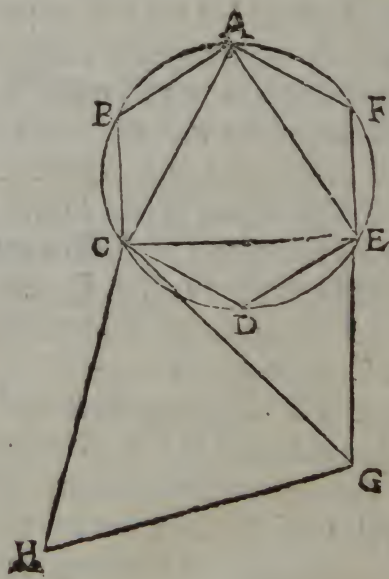
EX hujus propositionis demonstratione constat, hexagonum æquilaterum, & æquiangulum in circulo inscriptum duplum esse triāguli æquilateri in eodem circulo inscripti.

PROBL. XXXIV. PROPOS. LXX.

Dato hexagono æquilatero, & æquiangulo triangulum æquilaterum æquale constituere.

Dato hexagono æquilatero, & æquiangulo $ABCDEF$ triangulum æquilaterum æquale oportet constituere. In circulo $BD F$, circa hexagonum $ABCDEF$ descripto, inscribatur triangulum æquilaterum ACE , & erecta EG ad CE perpendiculari, quæ æqualis sit ipsi CE , adjungatur CG , super qua triangulum æquilaterum CGH constituatur. Quod dico hexagono $ABCDEF$ esse æquale. Quoniam igitur triangulum CEG est

rectan-

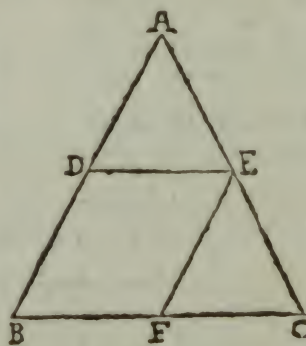


rectangulum; erit triangulum æquilaterum super $C G$ æquale triangulis æquilateris super $C E$, $E G$, quæ cum sint inter se æqualia, ob æqualitatem basium $C E$, $E G$; erit triangulum $C G H$ duplum trianguli $C E A$; sed ejusdem trianguli $C E A$ duplum est, per coroll: præcedētis propos.; hexagonū $A B C D E F$; ergo hexagonū $A B C D E F$ æquilaterum, & æquiangulum, & triangulum æquilaterum $C G H$ inter se erunt æqualia. Dato igitur hexagono æquilatero, & æquiangulo factum est, &c. Quod erat faciendum.

THEOR. XXXVII. PROPOS. LXXI.

Si duo latera cujuscunque trianguli bifariam dividantur; recta linea ad puncta sectionum adjuncta æqualis erit dimidiæ basis.

Sint latera $A B$, $A C$, trianguli $A B C$, bifariam divisa in D , & E . Dico rectam $D E$ æqualem esse dimidiæ basis $B C$. Ducatur $E F$ parallela rectæ $A B$. Quoniam igitur $E F$ parallela est rectæ $A B$; erunt latera $C A$, $C B$ proportionaliter divisa in E , & F ; sed $A C$ divisa est bifariam in E ; igitur $C B$ bifariam in F divisa erit. Cum autem $A B$, $A C$ divisa sint proportionaliter in D , & E ; erit $D E$ parallela rectæ $B F$; in quadrilatero igitur $D B F E$ latera opposita sunt parallela; quare parallelogrammum erit; ideo latus $D E$ opposito lateri $B F$ erit æquale; hoc est dimidiæ basis $B C$. Nam basis $B C$, ex demonstratis bifariam divisa est in F . Si igitur duo latera cujuscunque tri-

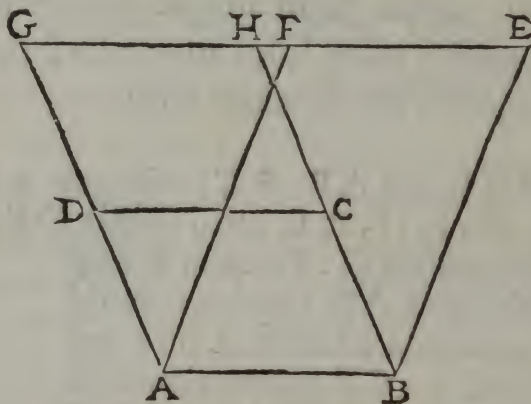


guli bifariam dividantur, &c. Quod probandum erat.

THEOR. XXXVIII. PROPOS. LXXII.

Si duo parallelogramma super eadem basi fuerint constituta, altitudo vero unius dupla fuerit altitudinis alterius; parallelogrammum, quod duplam habet altitudinem duplum erit alterius parallelogrammi.

Sint super eadem basi AB duo parallelogramma $ABCD$, $ABEF$ constituta, & altitudo parallelogrammi AE dupla sit altitudinis parallelogrammi AC . Dico parallelogrammum AE duplum esse parallelogrammi AC . Producantur latera AD , BC donec occurrant in G , & H rectæ EF productæ in G . Quo.



niam igitur parallelogramma AE , AH eandem habent altitudinem, & altitudo parallelogrammi AE dupla est altitudinis parallelogrammi AC ; erit altitudo parallelogrammi AH dupla altitudinis parallelogrammi AC ; adeoque altitudo parallelogrammi DH æqualis erit altitudini parallelogrammi AC ; quare parallelogramma AC , DH ita se habebunt, ut bases AB , DC ; atqui bases AB , DC sunt inter se æquales; igitur parallelogramma AC ,

A C, D H æqualia inter se erunt; ideo totum parallelogrammum A H duplum erit parallelogrammi A C. Est autem parallelogrammum A E æquale parallelogrammo A H; ergo parallelogrammum A E duplum erit etiam parallelogrammi A C. Si igitur duo parallelogramma super eadem basi fuerint constituta, altitudo vero unius, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. XXXIX. PROPOS. LXXIII.

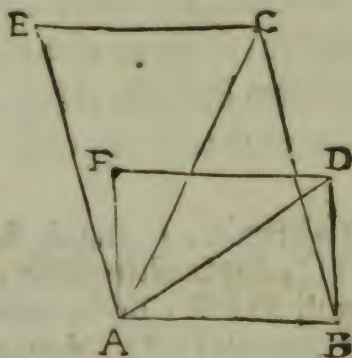
Si duo triangula super eadem basi fuerint constituta, altitudo vero unius dupla fuerit altitudinis alterius: triangulum quod duplam habet altitudinem alterius trianguli duplum erit.

Super eadem basi A B sint cōstituta duo triangula A B C, A B D, & altitudo trianguli A B, C sit dupla altitudinis, trianguli A B D.

Dico triangulum A B C duplum esse trianguli A B D. Ex A B, & B C descri-

batur parallelogrammum A B C E, & similiter ex A B, B D parallelogrammum A B D F. Quoniam igitur parallelogrammum A C duplum est trianguli A B C, & du-

plum etiam est parallelogrammi B F, ex præcedente propos; erunt triangulum A B C, & parallelogrammum B F inter se æqualia; est autem parallelogrammum B F duplum trianguli A B D; ergo triangulum A B C duplum erit ejusdem trianguli A B D. Si igitur duo triangula super eadem basi fuerint constituta, &c. Quod ostendendum erat.



CO-

COROLLARIUM.

EX hujus thorematis demonstratione constat, si triangulum, & parallelogrammum super eadem basi fuerint constituta, & altitudo trianguli fuerit dupla altitudinis parallelogrammi; triangulum, & parallelogrammum inter se esse equalia.

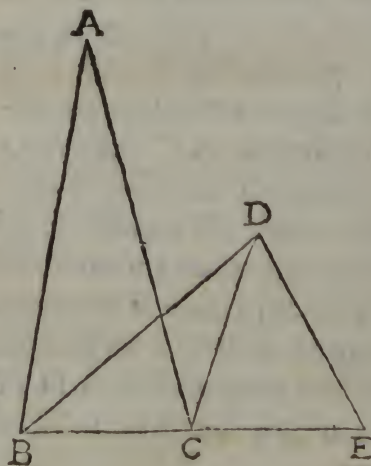
SCOLIUM.

QUOD si in duobus præcedentibus propositionibus tam duo parallelogramma, quam duo triangula super equalibus basibus fuerint constituta idem sequitur, eademque fere est demonstratio.

THEOR. XL. PROPOS. LXXIV.

Si fuerint duo triangula, quorum unum habeat altitudinem duplam altitudinis alterius, alterum vero basim duplam alterius basis: hæc duo triangula inter se erunt equalia.

SIT altitudo, trianguli ABC , dupla altitudinis, trianguli DBE , basis verò BE , trianguli DBE , dupla sit basis BC , trianguli ABC . Dico triangula ABC , DBE inter se esse æqualia. Ducatur DC . Quoniam igitur altitudo trianguli ABC , dupla est altitudinis trianguli DBE , & sunt super eadem basi



basi BC constituta; erit, per præcedentem proposi, triangulum ABC duplum triânguli DBC ; sed ejusdem triânguli DBC duplum est triangulum DBE : (basis enim BE dupla est basis BC) igitur triângula ABC , DBE inter se erunt æqualia. Quare si fuerint duo triângula, quorum unum habeat altitudinem duplam altitudinis alterius, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. XLI. PROPOS. LXXV.

Si fuerint duo triângula inter se æqualia, quorum unum habeat altitudinem duplam altitudinis alterius; triangulum quod subduplam habet altitudinem, habebit basim duplam basis alterius.

Sint triângula ABC , DBE inter se æqualia, altitudo vero triânguli ABC dupla sit altitudinis triânguli DBE . Dico, basim BE duplam esse basis BC . Si non dicatur dupla, vel est duplâ major, vel duplâ minor. Sit prius major duplâ. Ex BE , quæ major est duplâ basis BC , abscindatur BF , quæ dupla sit BC , jungaturq; DF . Quoniam igitur altitudo, triânguli ABC , dupla est altitudinis triânguli DBF , & basis BF , triânguli DBF , dupla est basis BC , triânguli ABC ; erit triângulum DBF , per præcedentem proposi, æquale triângulo ABC ; sed eidem triângulo ABC æquale est triângulum DBE ; igitur triângula DBF , DBE inter se



M

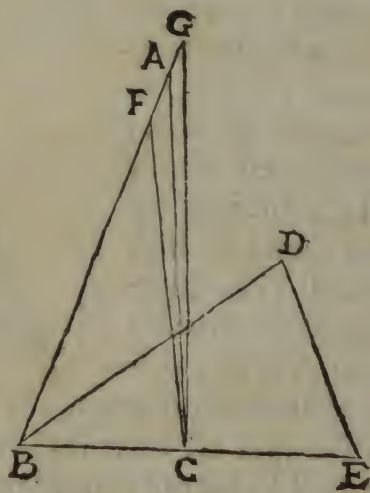
erunt

erunt æqualia, pars toti. Quod est absurdum. Sit deinde minor duplâ. Producatur igitur BE in G , ita ut BG dupla sit basis BC , ducaturque DG . Triangulum DBG , per præcedentem, æquale est triangulo ABC , & eodem triangulo ABC æquale est triangulum DBE ; ergo triangula DBG , DBE inter se erunt æqualia, pars toti. Quod est absurdum. Itaque basis BE nec est duplâ major, nec duplâ minor, sed dupla basis BC . Si igitur fuerint duo triangula inter se æqualia, quorum unum habeat altitudinem duplam, &c. Quod ostendendū erat.

THEOR. XLII. PROPOS. LXXVI.

Si fuerint duo triangula inter se æqualia, quorum unum habeat basim duplam basis alterius; triangulum quod subduplam habet basim habebit altitudinem duplam altitudinis alterius.

Sint duo triangula ABC , DBE inter se æqualia, sitque basis BE , trianguli DBE , dupla basis BC , trianguli ABC . Dico, altitudinē trianguli ABC duplam esse altitudinis trianguli DBE . Si non dicatur dupla erit, vel duplâ major, vel duplâ minor. Sit prius duplâ major. Sumatur BF ex recta BA , jungaturque FC , ita ut altitudo, trianguli FBG , dupla sit altitudinis, tri-

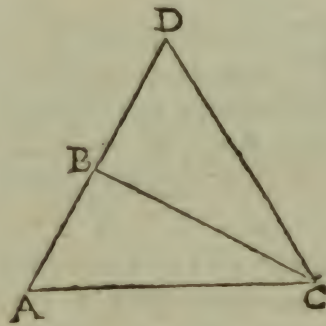


trianguli D B E. Erunt igitur, per 74. propos: hujus, trian-
gula F B C, D B E inter se æqualia; est autem triangulum
A B C æquale eidẽ triângulo D B E; igitur triângula A B C,
F B C æqualia inter se erunt. Quod est absurdũ, pars to-
ti. Sit deinde duplâ minor. Fiat triangulum G B C, ita ut
ipsius altitudo dupla sit altitudinis, triânguli D B E. Qua-
re triangulum G B C, ex eadem 74. propos: hujus, æquale
erit triangulo D B E, & eidem triângulo D B E æquale est
triangulum A B C; ergo triângula A B C, G B C inter se
erunt æqualia, pars toti. Quod est absurdum. Altitudo
igitur trianguli A B C, nec est duplâ major, nec minor
duplâ: sed dupla altitudinis triânguli D B E. Quare si fue-
rint duo triângula inter se æqualia, quorũ unum habeat
basim duplam, &c. Quod probandum erat.

THEOR. XLIII. PROPOS. LXXVII.

In triangulo rectangulo, si unus acutorum angulo-
rum duplus fuerit reliqui: latus angulum rectum
subtendens duplum erit lateris angulum subdu-
plum subtendentis.

IN triangulo rectangulo A
B C, sit unus acutorum
angulorum, B A C duplus re-
liqui anguli acuti B C A. Dico
latus A C, oppositũ angulo re-
cto A B C, duplum esse lateris
B A, angulo subduplo B C A
oppositi. Producatu'r A B in D,
ita ut B D æqualis sit rectæ A B, jungaturq; D C. Quo-
niam igitur latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia
sunt lateribus D B, B C, trianguli D B C, utrumque



M 2

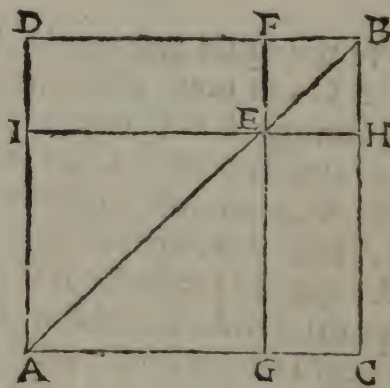
utri-

utriusque, & angulus ABC angulo DBC æqualis; erit
 basis AC basi CD æqualis, & angulus BCA angulo
 BCD æqualis. Quare totus angulus BCA duplus
 erit anguli BCA ; sed ejusdem anguli BCA duplus est,
 ex hypothesi, angulus BAC ; ergo anguli BCA , BAC
 inter se æquales erunt; ideoque latus DA lateri DC
 erit æquale; Est autem eidem lateri DC æquale latus
 AC , ex demonstratis; igitur latera AC , AD inter se erunt
 æqualia; Atqui latus DA duplū est lateris BA ; (nā BD ,
 BA inter se sunt æquales) igitur latus AC ejusdem lateris
 BA erit duplum. Itaque in triangulo rectangulo, si unus
 acutorum angulorum, &c. Quod probandum erat.

THEOR. XLIV. PROPOS. LXXVIII.

Si ex diametro quadrati abscissa fuerit pars æqualis
 lateri ejusdem quadrati, & per punctum sectionis
 duæ parallelæ ad latera ductæ fuerint; Gnomon in
 quo minus quadratum existit reliquo quadrato
 erit æqualis.

EX diametro AB ,
 quadrati $ACBD$,
 abscindatur AE æqualis
 lateri AC , & per pun-
 ctum sectionis E agantur
 ad latera DA , AC pa-
 rallelæ FG , HI . Dico
 gnomonem $DBCGEI$,
 in quo minus quadra-
 tum EB existit, æqua-
 lem esse reliquo quadra-
 to AEC . Quoniam igitur AC , AE inter se sunt æquales;
 erunt

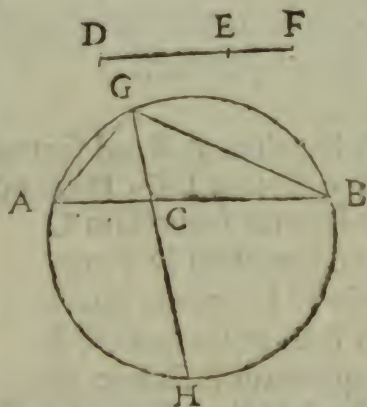


erunt quadrata ipsarum inter se æqualia; sed quadratum ex $A E$ duplum est quadrati lateris $A G$: igitur quadratum rectæ $A C$; hoc est quadratum $A C B D$ duplum erit quadrati lateris $A G$; hoc est quadrati $A G E I$. Quapropter quadratum $A G E I$ pars dimidia erit quadrati $A C B D$; ergo altera medietas erit gnomon $D B C G E I$; igitur gnomon $D B C G E I$ quadrato $A G E I$ erit æqualis. Si igitur ex diametro quadrati abscissa fuerit pars æqualis lateri, &c. Quod erat probandum.

PROBL. XXXV. PROPOS. LXXIX.

Data recta linea secta utcumque, per ipsius sectionis punctum rectam lineam ducere, cujus segmenta sint reciproca segmentis datæ rectæ lineæ, habeantque datam proportionem.

S It data recta linea $A B$, utcumque secta in C . Oportet igitur per punctum sectionis C rectam lineam ducere, cujus segmenta sint reciproca segmentis $A C$, $C B$, datæ rectæ $A B$, habeantque proportionem datam rectæ $D E$ ad $E F$. Inveniatur tribus rectis lineis $D E$, $E F$, $A C$ vel, $C B$, quarta proportionalis $C G$; hoc est sit $D E$ ad $E F$, ut $B C$ ad $C G$, & adjunctis $B G$, $A G$, describatur, circa triangulum $A B G$, circulus $A H B G$, & $G C$ producat in H . Dico segmenta $H C$, $C G$, rectæ $G H$, reciproca esse segmentis $A C$, $C B$, rectæ $A B$, & ha-

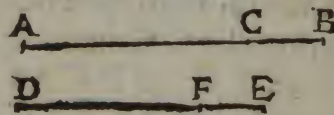


habere proportionem rectæ DE ad EF . Quoniam igitur in circulo $AGBH$, duæ rectæ AB , GH sese mutuo secant in C ; erit rectangulum comprehensum sub segmentis BC , CA , rectæ AB , æquale rectangulo contento sub segmentis HC , CG , rectæ GH ; adeoq; erit, ut BC ad CG , ita HC ad CA : sunt igitur segmenta HC , CG reciproca segmentis, AC , CB . Quod autem proportionem habeant inter se, ac recta DE ad EF , est manifestum. Demonstravimus enim esse HC ad CA , ut BC ad CG ; sed BC ad CG est, ut DE ad EF ; ergo HC ad CA erit, ut DE ad EF . Segmenta igitur HC , CG , AC , CB sunt inter se reciproca, & datam habent proportionē rectæ DE , ad EF . Data igitur recta linea utcunq; secta, factum est, &c. Quod erat faciendum.

THEOR. XLV. PROPOS. LXXX.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam; excessus, quo prima superat secundam, ad excessum, quo tertia superat quartam, eandem habebit rationem, quam secunda ad quartam.

S It prima AB ad secundam CB , ut tertia DE ad quartam FE . Dico esse excessum AC , quo prima AB superat secundam CB , ad excessum DF , quo tertia DE superat quartam FE , ut secunda CB ad quartam FE ; hoc est AC ad DF , ut CB ad FE . Quoniam igitur est AB ad CB , ut DE ad FE ; erit dividendo AC ad CB , ut D F ad FE , & permutando AC ad DF , ut CB ad FE .
Qua-

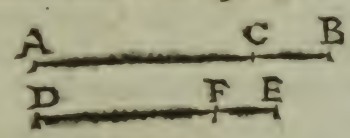


Quapropter si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. XLVI. PROPOS. LXXXI.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: excessus, quo prima superat secundam, eandem habebit rationem ad primam, quam excessus, quo tertia superat quartam, ad tertiam.

Sit prima AB ad secundam CB , ut tertia DE ad quartam FE . Dico esse excessum AC , quo prima AB superat secundam CB , ad primam AB , ut excessus DF , quo tertia DE superat quartam FE , ad tertiam DE ; hoc est AC ad AB , ut DF ad DE . Quoniam igitur est AB ad CB , ut DE ad FE ; erit dividendo AC ad CB , ut DF ad FE ; igitur, per compositionem rationis contrariam, erit AB ad AC , ut DE ad DF : ac proinde invertendo erit AC ad AB , ut DF ad DE . Si igitur prima ad secundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLIUM.

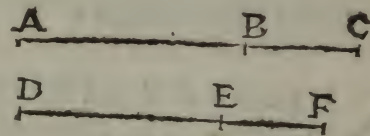
IN his duabus precedentibus propositionibus, ut perspicuum est, antecedens proportionis debet superare consequentem, ut sumi possit excessus, cujus habetur consideratio.

THEOR.

THEOR. XLVII. PROPOS. LXXXII.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; erit excessus, quo secunda superat primam, ad primam, ut excessus, quo quarta superat tertiam, ad tertiam.

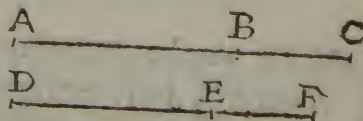
Sit prima AB ad secundam AC , ut tertia DE ad quartam DF . Dico excessum BC , quo secunda AC superat primam AB , esse ad primam AB , ut excessus EF , quo quarta DF superat tertiam DE , ad tertiam DE ; hoc est BC ad A , ut EF ad DE . Quoniam igitur est AB ad AC , ut DE ad DF ; erit dividendo AB ad BC , ut DE ad EF ; igitur, convertendo, erit BC ad AB , ut EF ad DE ; Quare si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia, &c. Quod erat probandum.



THEOR. XLVIII. PROPOS. LXXXIII.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: erit excessus, quo secunda superat primam, ad secundam, ut excessus, quo quarta superat tertiam, ad quartam.

Sit prima AB ad secundam AC , ut tertia DE ad quartam DF . Dico excessum BC , quo secunda AC superat primam AB , esse ad secundam AC , ut excessus EF , quo quarta DF superat



perat tertiam DE, ad quartam DF; hoc est BC ad AC, ut EF ad DF. Quoniam igitur AB est ad AC, ut DE ad DF; erit dividendo AB ad BC, ut DE ad EF, & componendo erit AC ad BC, ut DF ad EF; ergo, & contrario erit BC ad AC, ut EF ad DF. Itaque si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

Porro perspicuum est in his duabus præcedentibus propositionibus consequentem debere esse maiorem antecedente, ut sumi possit excessus, quo consequens superat antecedentem.

LEMMA.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales quarum major dupla sit minoris; quadratum maioris duplum erit rectanguli sub utraque contenti.

Si recta AB dupla rectæ B C. Dico quadratum ex A B duplum esse rectanguli sub A B, B C contenti. Quoniam igitur quadratam ex AB, & rectangulum sub AB, B C eandem basim habent AB, & quadratum ex AB altitudinem habet AB duplam altitudinis B C, rectanguli A B C; erit per prop. 72. huius, quadratum A B duplum rectanguli A B C. Quod demonstrandum erat.



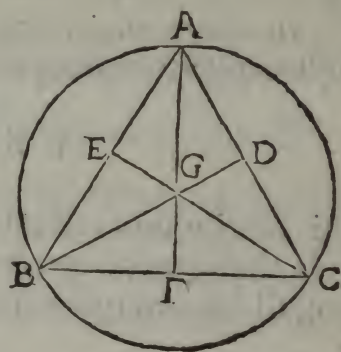
N

THEOR.

THEOR. XLIX. PROPOS. LXXXIV.

Rectangulum contentum sub latere trianguli æquilateri, & sub ipsius dimidia æquale est rectangulis contentis sub segmentis perpendicularium, ab angulis ad opposita latera, cadentium.

A B angulis ABC , BCA , CAB , trianguli æquilateri ABC , cadant ad latera opposita AC , AB , BC perpendiculares BD , CE , AF , quæ, quia secant angulos à quibus sunt ductæ bifariam, se mutuo secabunt, in G , per propof: 59. hujus. Dico rectangulum contentum sub latere AB , trianguli æquilateri ABC , & sub ipsius dimidia BE æquale esse rectangulis contentis sub segmētis AG , GF , BG , GD , CG , GE , perpendicularium AF , BD , CE ; hoc est rectangulū ABE æquale esse rectangulis AGF , BGD , CGE . Circa triangulum ABC circulus describatur CBA . Quoniā igitur, per coroll: prop: 18. lib. 14. AG dupla est rectæ GF ; erit, per præcedēs lemma, quadratū AG duplum rectanguli AGF , & per idem lemma, quadratum AB duplum rectanguli ABE ; est autē quadratum AB , per prop: 12. lib. 13. triplum quadrati AG ; ergo rectangulum ABE rectanguli AGF triplum erit; hoc est æquale tribus rectangulis AGF , BGD , CGE . Itaque rectangulum contentum sub latere trianguli æquilateri, & sub ipsius dimidia æquale est, &c. Quod ostendendum erat.

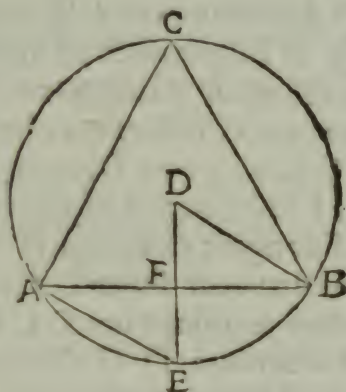


THEOR.

THEOR. I. PROPOS. LXXXV.

Recta linea in circulo accommodata secans semidiametrum ejusdem bifariam, & ad angulos rectos, erit latus trianguli æquilateri in eodem circulo inscripti.

Recta AB in circulo ABC accommodata secet semidiametrum DE bifariam in F , & ad angulos rectos. Dico AB esse latus trianguli æquilateri in circulo ABC inscripti. Adjungantur rectæ AE , DB , & diviso arcu ACB bifariam in C , jungantur rectæ AC , BC . Quoniam igitur duo latera AF , FE , trianguli AFE , æqualia sunt duobus lateribus BF , FD , trianguli BFD , utrumque utrique, angulus vero AFE angulo BFD æqualis; erit AE semidiametro DB æqualis. Quare AE latus erit hexagoni æquilateri, & æquianguli in circulo ABC inscripti; ergo arcus AE est pars sexta circuli ABC ; sed arcus EB æqualis est arcui AE ; igitur totus arcus AEB duæ sextæ partes erit; hoc est pars tertia circuli ABC ; ergo reliquæ duæ tertiæ partes, erit arcus ACB , qui cum sit bifariam divisus in C , erit uterq; arcus AC , CB tertia pars circuli ABC ; Divisa est igitur circumferentia CBA , circuli ABC in tres arcus AB , BC , CA inter se æquales; ac proinde rectæ AC , CB , BA ipsis subtensæ inter se æquales erunt; triangulum igitur ACB est æquilaterum. Itaque recta



N 2

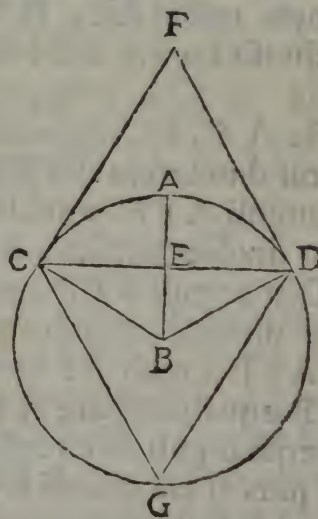
A B

A B latus est trianguli æquilateri in circulo A B C in-
scripti . Quod erat demonstrandum .

THEOR. LI. PROPOS. LXXXVI.

Si recta linea secuerit semidiametrum circuli bifa-
riam, & ad angulos rectos; latera trianguli æqui-
lateri super ipsa constituti, & extra circulum ver-
gentis ipsum circulum tangent .

S Emidiameter A B, circuli D G C, secetur à recta C
D bifariam, & ad angulos rectos in E, & super C D
constituatur triangulum æqui-
laterum C D F extra circulum
D G C vergens. Dico latera F
C, F D, trianguli æquilateri C
D F, tangere circulum D G C.
Constituatur super D C trian-
gulum æquilaterum D C G in-
tra circulum D G C cadens
(quod, per præcedentem, erit
in circulo D G C inscriptum)
ducaturque semidiametri C B,
D B . Quoniam igitur angulus
C B D duplus est anguli C G
D, qui pars tertia est duorum
rectorum; erit ipse duæ tertiæ
partes duorum rectorum; adeoque alia pars tertia duo-
rum rectorum erunt anguli B C D, B D C; hoc est erunt
duæ tertiæ partes unius recti, qui cum sint inter se æqua-
les; erit unus ipsorum, nempe angulus B C D pars ter-
tia unius recti; est autem angulus F C D duæ tertiæ par-
tes

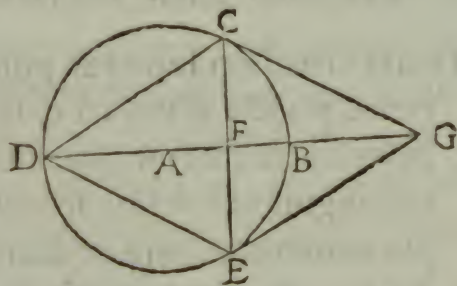


res unius recti; ergo totus angulus $F C B$ erit tres tertie partes unius recti; hoc est rectus; ac propterea recta $C F$, ab extremitate semidiametri $C B$ ad angulos rectos ducta, tanget circumulum $D G C$. Eadem ratione $F D$ eundem circumulum $D G C$ tanget. Itaque si recta linea secuerit semidiametrum circuli bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. LII. PROPOS. LXXXVII.

Si circuli semidiameter bifariam secta fuerit, & à puncto sectionis perpendicularis ad ipsam excitetur; donec circumpherentiæ occurrat; rectangulum contentum sub composita ex diametro, & semidiametro, & sub semidiametro sola æquale erit quadratis, quæ fiunt alterum à perpendiculari, alterum vero à majori segmento diametri.

Dividatur semidiameter $A B$, circuli $B C D E$, bifariam in F , & à puncto F ad ipsam $A B$ perpendicularis erigatur $F C$ circumpherentiæ occurrens in C . Dico rectangulū cōtētū sub recta linea cōposita ex diametro $D B$, & semidiametro $A B$, & sub semidiametro sola esse $A B$ æquale quadratis, quæ fiūt alterū à perpendiculari $F C$, alterū vero à majori segmento $F D$, diametri $B D$. Producat $C F$ in E , & super $C E$ constitutur



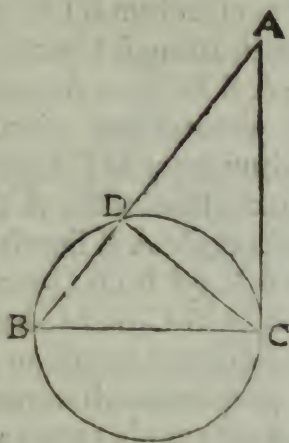
tuatur triangulum æquilaterum $C E G$ extra circum-
 cadēs; jungāturque $C D, E D$; erit igitur per cōst. prop. 85.
 hujus, triangulum $C D E$ æquilaterum, & $D B$ producta,
 necessario per punctum G transibit, quia triangulum $C E$
 G est æquilaterum, & recta $F G$ secat basim $C E$ bifariā,
 & ad angulos rectos. Quoniam igitur anguli $D C F, D$
 $F C$, trianguli $F D C$, æquales sunt angulis $G C F, G F C$,
 trianguli $F G C$, uterq; utriq; & latus $C F$ commune; erit
 latus $D F$ lateri $G F$ æquale: demptis igitur rectis $A F, B$
 F , quæ inter se sunt æquales, remanebūt, $D A, B G$ æqua-
 les inter se; recta igitur $D G$ est composita ex diametro
 $D B$, & recta $B G$, quæ semidiametro $D A$ est æqualis. Cū
 autem $D C, C G$, inter se sunt æquales erunt ipsarum
 quadrata inter se æqualia; sed quadrato $D C$ æqualia
 sunt quadrata $C F, F D$; ergo quadrata $C F, F D$ qua-
 drato $C G$ æqualia erunt. Et quia, per præcedentem, re-
 cta $C G$ tangens est circum $B C D E$; erit rectangulum
 $D G B$ æquale quadrato $C G$: hoc est quadratis $C F, F$
 D . Quare si circuli semidiameter bifariam secta fuerit, &
 à puncto sectionis perpendicularis, &c. Quod erat de-
 monstrandum.

THEOR. LIII. PROPOS. LXXXVIII.

Si extra circum sumentur punctum, & ab eo ad ex-
 trema puncta diametri ejusdem circuli duæ rectæ
 lineæ ductæ fuerint, quarum una circum secet, &
 rectangulum sub ipsa secante, & sub interius afsū-
 pta contentum æquale fuerit quadrato diametri;
 Altera recta linea circum tangens erit.

A Puncto A ad extrema puncta $B, \& C$, diametri
 $B C$, circuli $B C D$, sint ductæ duæ rectæ lineæ $A B$,
 $A C$,

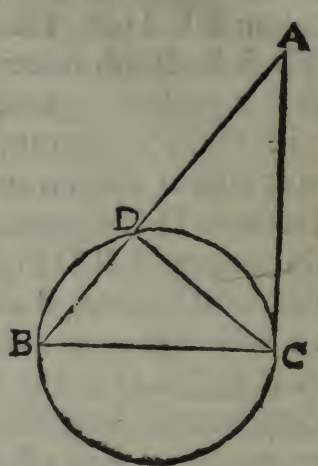
A C, quarum A B sit secans circulum B C D, & rectangulum sub ipsa A B, & sub interius assumpta D B æquale sit quadrato diametri B C. Dico alteram rectam A C tangentem esse circulum B C D. Ducatur D C. Quoniam igitur rectangulum A B D æquale est quadrato B C; erit A B ad B C, ut B C ad B D; ideoque quia triangula A C B, C B D habent latera circa communem angulum A B C proportionalia; hoc est A B ad B C, ut B C ad B D; erunt ipsa triangula A C B, C B D æquiangula; ideoque angulus A C B rectus erit, utpote qui æqualis est angulo recto B D C in semicirculo; Quare A C tangens erit circulum B C D. Si igitur extra circulum sumatur punctum, & ab eo, &c. Quod ostendendum erat.



THEOR. LIV. PROPOS. LXXXIX.

Si extra circulum sumatur punctum, & ab eo ductæ fuerint duæ rectæ lineæ, quarum una circulum secet, altera vero eundem contingat, & quadratum rectæ lineæ subtenfæ arcui à secante, & tangente intercepto æquale fuerit rectangulo contento sub secante, & sub interius assumpta: Recta illa linea subtenfa erit diameter circuli.

A Puncto A extra circulum B D C sint ductæ duæ rectæ lineæ A B, A C, quarum altera A B circulum B D C

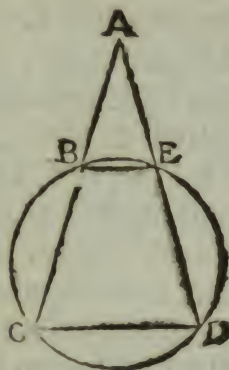
B D C secet, altera vero A C eundem circum B D C tangat, sitq; quadratum B C æquale rectangulo A B D. Dico subtenfam B C esse diametrum circuli B D C. Adjungatur D C. Quoniam igitur quadratum rectæ A C æquale est rectangulo A B D; erit A B ad B C, ut B C ad B D; Quare cum triangu-

 gula A B C, B D C habeant circa communem angulum A B C latera proportionalia; erunt ipsa inter se æquiangula; ergo angulus B A C angulo B C D erit æqualis. Cū autem angulus D A C, trianguli A C D æqualis sit angulo D C B, trianguli C B D, & angulus D C A, ad contactus tangentis A C, æqualis angulo D B C, in alterno segmento; erit reliquus angulus A D C reliquo angulo B D C æqualis; idcirco angulus B D C rectus erit; igitur segmentum B C D, in quo constitutus est angulus rectus B D C, semicirculus erit; Ac propterea B C circuli diameter est. Itaque si extra circum sumatur punctum, & ab eo, &c. Quod erat probandum.

THEOR. LV. PROPOS. XC.

Si extra circum sumatur punctum, ab eoque ductæ fuerint duæ rectæ æquales circum secantes: Rectæ lineæ subtenfæ arcibus à secantibus interceptis parallelæ inter se erunt.

A Puncto A extra circum B C D E sint ductæ rectæ A C, A D æquales inter se, & circum B C D E
 se-

secantes. Dico rectas BE , CD subtenfas arcubus EB ,
 DC interceptis à secantibus A
 C , AD , parallelas inter se esse.
 Quoniam igitur rectangulum sub
 AC , AB æquale est rectangulo
 sub AD , AE ; erit AC ad AE ,
 ut AD ad AB , & vicissim ut AC
 ad AD , ita AE ad AB ; sunt au-
 tem AC , AD inter se æquales;
 igitur AE , AB æquales inter se
 erunt; ac ideo quæ remanent BC
 ED æquales etiam inter se erunt.
 Quare erit AB ad AE , ut BC ad
 ED , & permutando AB ad BC , ut AE ad ED ; Secta
 sunt igitur latera AC , AD , trianguli ACD , proportio-
 naliter in B , E ; igitur BE parallela erit basi CD . Si igitur
 extra circumulum sumatur punctum, ab eoq; &c. Quod
 erat demonstrandum.



THEOR. LVI. PROPOS. XCI.

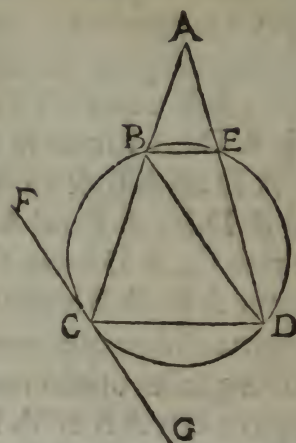
Si extra circumulum sumatur punctum, ab eoque duæ
 rectæ lineæ ductæ fuerint circumulum secantes, & re-
 ctæ lineæ subtenfæ arcubus ab ipsis interceptis
 fuerint parallelæ: secantes inter se æquales erunt.

A puncto A extra circumulum $BCDE$ sint ductæ duæ
 rectæ AC , AD secantes circumulum $BCDE$, & re-
 ctæ BE , CD subtenfæ arcubus EB , DC ab ipsis secanti-
 bus AC , AD , sint inter se parallelæ. Dico secantes AC ,
 AD æquales inter se esse. Ducatur FG tangens circu-
 lum $BCDE$ in C , jungaturq; B D . Quoniam igitur an-
 gulus FCB æqualis est angulo BDC , & eidem angulo

O

BDC

BDC æqualis est angulus EBD ; erunt anguli FCB , EBD inter se æquales; Est autem angulus GCD angulo CBD æqualis; igitur totus angulus CBE æqualis est duobus angulis FCB , GCD ; sed anguli FCB , GCD , simul cum angulo BCD æquales sunt duobus rectis; igitur angulus CBE simul cum angulo BCD duobus rectis æqualis erit; sed idem angulus CBE cum angulo CDE etiã duobus rectis est æqualis: igitur anguli BCD , EDC æquales inter se erunt; ac propterea secantes AC , AD ipsis oppositæ æquales inter se sunt. Si extra circulum sumatur punctum, ab eoque duæ rectæ lineæ ductæ fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



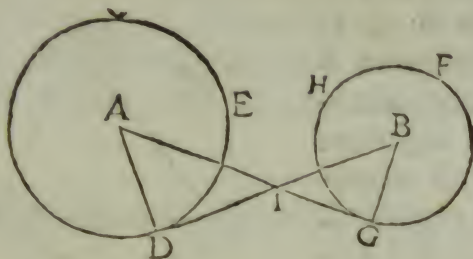
THEOR. LVII. PROPOS. XCII.

Si à centris duorũ circulorum, sive se exterius tangãt, sive non, duæ tangentes ipsos circulos, sese mutuò secantes, demittantur, rectangulum comprehensũ sub segmentis unius æquale erit ei, quod sub segmentis alterius continetur rectangulo.

A Centris A , B circulorum CDE , FGH ducantur rectæ AG , BD circulos CDE , FGH tãgẽtes: hoc est AG tangens circulum FGH , BD verò circulum CDE , quæ sese mutuò secant in I . Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AI , IG tangentis AG æquale esse ei, quod sub segmentis BI , ID tangentis BD continetur.

tinetur, rectangulo. A centris A, B ad contactus D, G
duæ rectæ AD,
B G ducantur.

Quoniam igitur
rectæ AD,
B G sunt ad D
B, G A perpē-
diculares; erit
angulus A D I,
trianguli A I D,



æqualis angulo B G I, trianguli B I G, & est angulus A I D
æqualis angulo B I G; erit ergo reliquus angulus D A I re-
liquo angulo G B I æqualis. Quare triangula A D I, B G
I æquiangula inter se erunt; ac propterea latera A I, I D
trianguli D A I, & latera B I, I G, trianguli B G I, quæ
circa æquales angulos A I D, B I G sunt, proportionalia
erunt; hoc est erit A I ad I D, ut B I ad I G; adeoq; re-
ctangulum comprehensum sub extremis A I, I G; hoc est
sub segmentis tangentis A G æquale erit ei, quod sub
mediis B I, I D; hoc est sub segmentis tangentis B D cō-
prehenditur, rectangulo. Quapropter si à centris duorum
circulorum, sive se exterius tangant, sive non, duæ tan-
gentes, &c. Quod ostendendum erat.

PROBL. XXXVI. PROPOS. XCIII.

Circuli peripheriam in datâ proportionē secare.

Sit secunda peripheria A B C D in data proportionē
rectæ E F ad F G. Dividatur E F, quam volumus ef-
se antecedentem proportionis, bifariam in H, & consti-
tuatur triangulum isosceles I L K, per propof: 37. lib. 1.
collec. Pappi, cujus uterq; angulorū L I K, I K L, qui ad
basin I K sunt, habeat ad reliquum I L K proportionem,

O 2

quam

quam habet recta HF ad rectam FG. Deinde abscin-

datur à circu-

lò A B C D

segmentum B

C D, quod ca-

piat angulum

DCB æqua-

lem angulis L

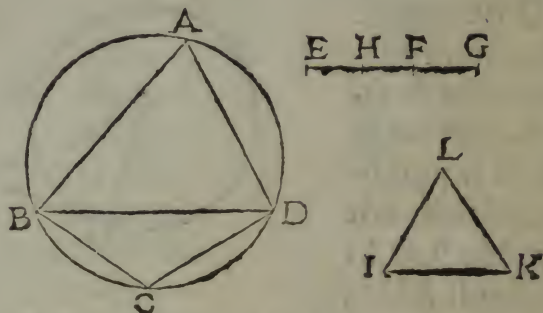
I K, L K I. Di-

co peripheriā

ABCD divi-

sam esse in-

datā proportionē rectæ EF ad FG; hoc est esse arcum
BAD ad arcum DCB, ut recta EF ad FG. In segmen-
tò BAD constituatur angulus DAB. Quoniam igitur
EH, HF inter se sunt æquales, habebunt ad eandem FG
eandem proportionem. Eademq; ratione quia anguli LI
K, LKI, sunt inter se æquales, habebunt ad eundem an-
gulum ILK eandem proportionem. Quare cum angu-
lus LIK habeat ad angulum ILK proportionem rectæ
HF ad FG, habebit etiam angulus LKI ad angulum
ILK proportionem eandem, ac habet recta HF; hoc est
recta EH ad FG. Itaque cum prima LIK ad secundam
ILK eandem habeat proportionem, quam tertia HF ad
quartam FG, & quinta LKI ad secundam ILK eandem
habeat proportionem, quam sexta EH ad quartam FG:
composita ex primâ LIK, & quintâ LKI habebit ad se-
cundam ILK eandem proportionem, ac habet EF com-
posita ex primâ EH, & sextâ HF ad quartam FG; hoc
est erit angulus BCD, qui æqualis est angulis LIK, LKI,
ad angulum ILK, ut EF ad FG. Et quia angulus BCD
æqualis est, ex constructione angulis IKL, KIL; erit re-
liquus angulus BAD reliquo angulo ILK æqualis (nam
tam anguli BCD, BAD, quam anguli IKL, KIL, I
LK



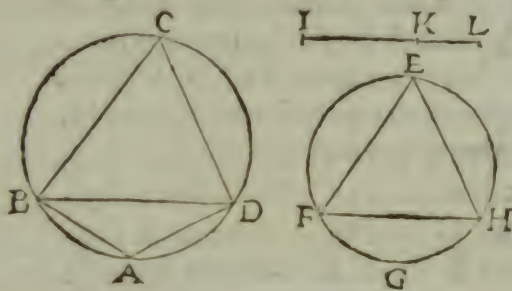
LK duobus rectis sunt æquales; adeoque angulus BCD erit ad angulum BAD, ut EF ad FG; sed ut angulus BCD ad angulum BAD, ita est arcus DAB ad arcum DCB; igitur erit etiã ut EF ad FG ita arcus DAB ad arcum, DCB. Circuli igitur peripheria secta est, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. XXXVII. PROPOS. XCIV.

Ex duobus quibuslibet circulis duo segmenta abscindere, quæ capiant duos angulos datam proportionem tenentes.

EX circulis ABCD, EFGH abscindere oportet duo segmenta, quæ capiant duos angulos datam proportionem rectæ IK ad KL habentes.

Dividatur per præcedentem peripheria ABCD in datâ proportionem IK ad KL; hoc est sit ut IK ad K



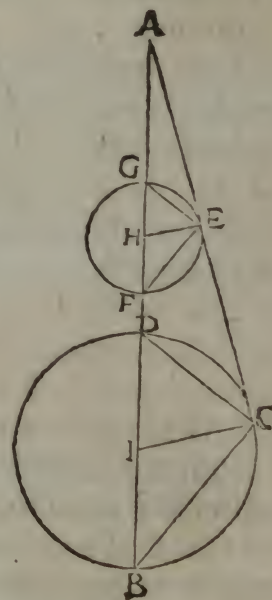
L, ita segmentum BCD ad segmentum BAD, quibus insistant anguli BAD, BCD. auferatur deinde à circulo EFGH segmentum FEH, quod capiat angulum HEF æqualem angulo BCD. Dico segmenta BAD, FEH, abscissa à circulis ABCD, EFGH, capere angulos BAD, FEH habentes proportionem rectæ IK ad KL. Quoniam igitur segmentum BCD ad segmentum BAD est ut IK ad KL, & ut idem segmentum BCD ad segmentum

mentum BAD , ita est angulus BAD ad angulum BCD ; erit ut IK ad KL , ita angulus BAD ad angulum BCD : hoc est ad angulum FEH , sunt enim anguli BCD , FEH , ex constructione, inter se æquales. Ex duobus igitur circulis abscissa sunt duo segmenta, quæ, &c. Quod erat faciendum

THEOR. LVIII. PROPOS. XCV.

Si duæ rectæ lineæ ab eodem puncto ductæ fuerint, quarum una secet duos circulos, transeatque per ipsorum centra, altera vero eosdem contingat: segmenta circulorum ab ipsis intercepta sive convexa, sive concava similia inter se erunt, & insuper rectæ lineæ ipsis subtensæ erunt inter se parallelæ.

A Puncto A sint ductæ duæ rectæ AB , AC , quarum una AB secet circulos BCD , FEG , transeatque per ipsorum centra H , & I , altera vero AC eosdem circulos contingat in C , & E . Dico segmenta GE , DC , convexa, & segmenta EF , CB concava inter se similia esse, & insuper rectas GE , DC , EF , CB , ipsis subtensas parallelas inter se esse, utraq; utriq; A cætris H , & I ad puncta cōtactus E , C adjungantur rectæ HE , IC . Quoniam igitur anguli AEH , ACI sunt inter se æquales: (ambo enim sunt recti) erunt HE , IC inter se parallelæ; quare anguli



GHE,

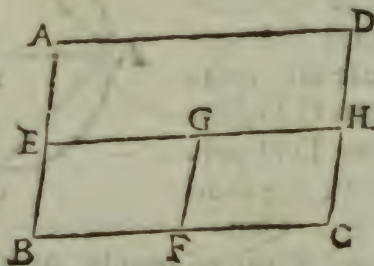
III

G H E, D I C inter se æquales erunt; sed angulus G H E
duplus est anguli G F E, & angulus D I C duplus anguli
D B C; igitur anguli G F E, D B C æquales inter se erunt;
adeoq; segmenta G E, D C similia inter se erunt. Eadem
ratione quia anguli F G E, B D C sunt inter se æquales;
erunt segmenta E F, C B similia inter se. Quod rectæ G E,
D C, & rectæ E F, C B sint inter se parallelæ, est mani-
festū, ostēdimus enim angulos G F E, D B C esse inter se
æquales, item, & angulos F G E, B D C æquales inter se.
Si duæ igitur rectæ lineæ ab eodem pūcto ductæ fuerint,
quarum una secet duos circulus, transeatq; &c. Quod
erat ostendendum.

L E M M A.

Si parallelogrammū habuerit bina latera ipsum com-
prehendentia dupla duorum laterum alterius parallelo-
grammi, similis, similiterque positi utrumq; utriusque :
Parallelogrammum parallelogrammi quadruplum erit.

Habeat parallelogrā-
mum A B C D late-
ra A B, B C ipsum com-
prehendentia dupla duo-
rum laterum E B, B F pa-
rallelogrammi E B F G, si-
milis, similiterque positi,
utrumque utriusq; hoc est
latus A B duplum lateris E B, & B C duplum lateris B F.
Dico parallelogrammum A C quadruplum esse parallelo-
grammi E F similis similiterq; positi. Producatur recta E G
in H. Quoniam ergo B C dupla est rectæ B F, erit parallelo-
grammū E C parallelogrammi E F duplum. & quia recta B E
æqualis est rectæ E A, erit parallelogrammum A H parallelo-
gram-

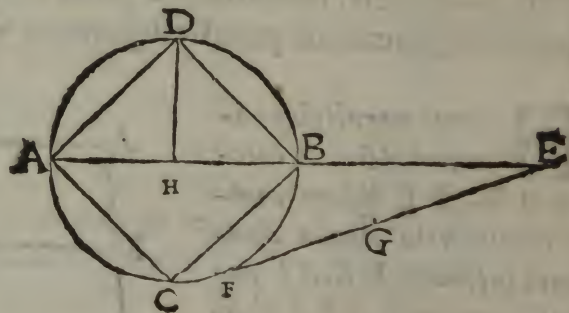


logrammo EC æquale; ergo igitur totum parallelogrammum AC duplum erit parallelogrammi EC ; atqui parallelogrammum EC duplum est parallelogrammi EF ; igitur parallelogrammum AC quadruplum erit parallelogrammi EF . Quod erat probandum.

THEOR. LIX. PROPOS. XCVI.

Si diameter circuli producta fuerit, ita ut adjuncta sit æqualis diametro, & ab extremitate adjunctæ ducatur recta tangens circulum: quadratum dimidiæ tangentis æquale erit quadrato in circulo inscripto.

S It producta diameter AB , circuli $ACBD$ in E , ita ut BE æqualis sit diametro AB , dividaturq; tangens EF bifariam in G . Dico quadratum dimidiæ GF , tangentis EF , æquale esse quadrato CD . Ducatur DH perpendicularis ad AB . Quo-



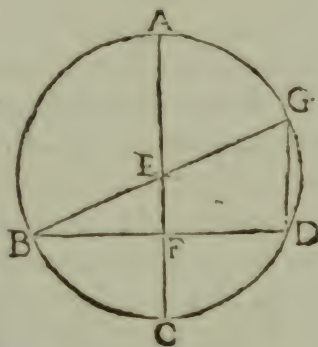
niam igitur triângula ABD , BDH sunt inter se similia; erit diameter AB ad rectam BD , ut recta BD ad semidiametrum BH . Quare erit quadratum rectæ BD ; hoc est quadratum CD æquale rectangulo ABH . Cum autem rectangulum AEB quadruplum sit, per antecedens lemma, rectanguli ABH , & quadratum tangentis EF æquale rectangulo AEB ; erit quadratum tangentis

gentis FF quadruplum rectanguli ABH ; hoc est quadrati CD ; Sed idem quadratum tangentis EF quadruplum est quadrati ipsius dimidiæ GF ; erit ergo quadratum rectæ GF , quæ dimidia est tangentis EF , æquale quadrato CD , in circulo $ACBD$ inscripto. Si igitur diameter circuli producta fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. LX. PROPOS. XCVII.

Si in circulo recta linea non per centrum extensa secet diametrum ejusdem circuli ad angulos rectos; quadratum à diametro descriptum excedet quadratum secantis quadrato quadruplo quadrati rectæ lineæ, quæ inter punctum sectionis, & centrum circuli interponitur.

IN circulo $ABCD$, cujus centrū E , recta BD secet diametrum AC ad angulos rectos in F . Dico quadratum diametri AC excedere quadratum secantis BD quadrato quadruplo quadrati rectæ EF . Ducatur diameter BG , jungaturq; DG . Quoniam igitur, basis DG , per propos: 71. hujus, dupla est rectæ FE ; erit quadratum rectæ DG quadruplum quadrati rectæ FE . Cum autem quadratum BG æquale sit quadratis rectarum BD , DG ; dempto quadrato rectæ DG ; excedet propterea quadratum rectæ BG ; hoc est diametri AC quadratum secantis BD quadrato rectæ DG , quod quadruplum est, ex demonstratis, quadrati rectæ FE . Si igitur in circulo recta linea, &c. Quod erat probandum.

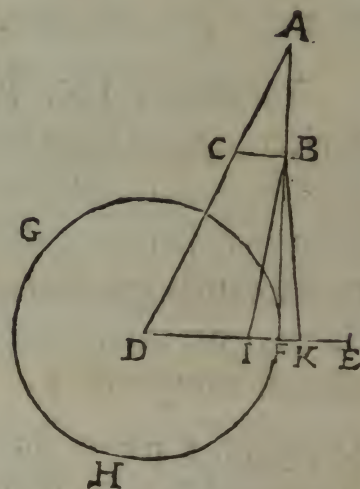


P

PROBL.

Data recta linea, circulum describere, ita ut, si data, recta linea producat eum contingat.

A Puncto B erigatur B C perpendicularis ad datam A B, jungaturque A C, quæ producat utrunque in D. deinde ducta D E parallela ad C B, sumatur ex D E recta D F, ita ut sit A D ad D F, ut A C ad C B. Denique centro D, intervallo vero D F, describatur circulus F G H. Quem dico esse quæsitum; hoc est recta A B eum contingere si ulterius producat. Producat igitur A B, quæ cadet in F; Si enim dicatur non cadere in puncto F. Cadat, si fieri potest, vel in puncto I, vel in puncto K. Cadat primū in puncto I. Quare cum D I parallela sit rectæ C B, erunt anguli A D I, A I D, trianguli D I A, æquales angulis A C B, A B C, trianguli C B A: adeoque triagula D I A, C B A æquiangula inter se erunt; Idcirco erit A D, ad D I, ut A C ad C B; sed ut A C ad C B, est etiam A D ad D F; ergo erit A D ad D I, ut eadem A D ad D F; A D igitur eandem proportionem habet ad D F, & D I. Quapropter D F, D I inter se æquales erunt. Pars toti. Quod est absurdum. Si vero dicatur A B cadere in puncto K. Eodē argumento ostendemus, partem D F toti D K esse æqualem. Recta igitur A B cadet in puncto F; ac ideo tanget circulum F G H, nam D F parallela est rectæ C B;

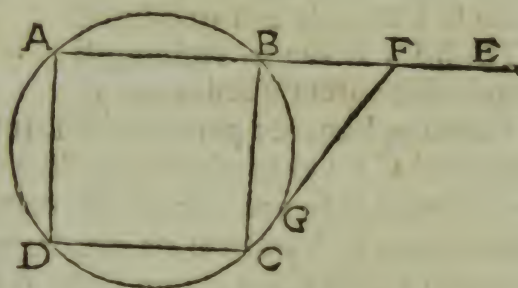


CB; quare angulus AFD rectus erit, utpote, qui æqualis angulo recto ABC. Quod erat faciendum.

PROBL. XXXIX. PROPOS. XCIX.

In producto latere quadrati in circulo inscripti, invenire punctum, à quo ducta tangente ipsum circum sit quadratum tangentis æquale quadrato in circulo inscripto.

EX latere AB utcumq; producto in E abscindatur AF, ita ut AB sit, per proposit. 9. hujus, media proportionalis inter totam AF, & adjunctam BF. Dico F esse punctum de quo queritur.



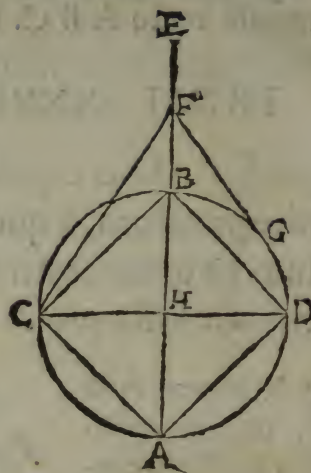
Ducatur igitur FG circum D C B A tangens. Quoniam igitur AB est media proportionalis inter totam AF, & adjunctam BF, erit quadratum AC, à media AB descriptum æquale rectangulo AFB; sed eidem rectangulo AFB æquatur quadratum tangentis FG; ergo quadratum AC, & quadratum tangentis FG inter se erunt æqualia. Quod erat faciendum.

PROBL. XL. PROPOS. C.

In diametro circuli producta invenire punctum, à quo ducta tangente circum, sit quadratum tangentis æquale quadrato in circulo inscripto.

Dia-

Diameter AB secetur à diametro CD ad angulos rectos, & centro C, intervallo vero CD, secetur BE in F. Dico F esse punctum quæsitum. Ducatur igitur FG tangens circulum ACBD, jungaturque CF. Quoniam igitur angulus FBC major est angulo recto BHC; erit triangulum CBF obtusangulum. Quare quadratum CF æquale erit quadratis CB, BF, & duplo rectanguli FBH: Est autem quadratum CB subdumplum, seu pars dimidia quadrati CD; hoc est quadrati CF: ergo altera medietas quadrati CF erit quadratum BF, una cum duplo rectanguli FBH; igitur quadratum CB æquale est quadrato BF, & duplo rectanguli FBH. Cum autem recta AB secta sit bifariam in H, & ei adjecta sit in rectum BF; erit rectangulum AF B, una cum quadrato BH æquale quadrato FH; sed eidem quadrato FH æqualia sunt quadrata FB, BH, & duplum rectanguli FBH; ergo quadrata FB, BH, & duplum rectanguli FBH æqualia erunt rectangulo AF B, & quadrato BH; Ablato igitur cõmuni quadrato BH; erit rectangulum AF B æquale quadrato FB, & duplo rectanguli FBH; hoc est quadrato CB; Est autem quadratum tangentis FG æquale eidem rectangulo AF B; ergo igitur quadratum tangentis FG, & quadratum rectæ CB; hoc est quadratum CD, in circulo inscriptum, inter se sunt æqualia. In diametro igitur producta circuli inventum est, &c. Quod faciendum erat.



F I N I S.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.173

KONSERVIERT DURCH
ÖSTERREICHISCHE FLORENZHILFE
WIEN 1967

005644682